Bsp 19: Sei A ein beschränkter, linearer Operator auf B. Definiere

$$P_t := e^{tA} := u\text{-}\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k \quad , \quad t \geq 0$$

Da für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $t \geq 0$

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k \Big\| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!} \|A^k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!} \|A\|^k \leq e^{t\|A\|} < \infty$$

ist P_t wohldefiniert. Weiterhin gilt $P_0 = A^0 = I$ und für $s,t \geq 0$

$$P_{s+t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (s+t)^k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!\,(k-l)!} s^l t^{k-l} A^k$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} s^l A^l \sum_{k=l}^{\infty} \frac{1}{(k-l)!} t^{k-l} A^{k-l}$$

$$= \Big(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} s^l A^l \Big) \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k \Big) = P_s \cdot P_t$$

Also ist die Familie $(P_t)_{t \geq 0}$ eine Halbgruppe. Weiterhin gilt

$$\| P_t - I \| = \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \Big\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \|A\|^k = e^{t\|A\|} - 1 \xrightarrow[t \downarrow 0]{} 0$$

Folglich ist $(P_t)_{t\geq 0}$ gleichmäßig (und damit auch stark) stetig.

Zudem ergibt sich für jedes $t>0$

$$\left\| \frac{1}{t}(P_t - I) - A \right\| = \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k!} \|A\|^k = \frac{1}{t}\left(e^{t\|A\|} - 1 - t\|A\|\right)$$

Daraus folgt

$$\operatorname*{s-lim}_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(P_t f - f) = Af \quad , \text{ d.h. } G = A \text{ und } D(G) = B$$

<u>Aufgabe</u>: Sei $(P_t)_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe linearer Kontraktionen auf B und bezeichne mit $(G, D(G))$ den zugehörigen Generator. Definiere für $\lambda > 0$ und jedes $t \geq 0$

$$P_t^\lambda := e^{-\lambda t} P_t$$

Zeige, daß $(P_t^\lambda)_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe linearer Kontraktionen auf B ist und bestimme den zugehörigen Generator G^λ.

<u>Bsp. 20:</u> Sei $N=(N_t)$ ein Poissonprozeß mit Intensität $\lambda > 0$. Sei $(P_t)_{t\geq 0}$ die zugehörige Halbgruppe auf $B = C_b(\mathbb{Z})$, d.h.

$$(P_t f)(x) = \mathbb{E}_x[f(N_t)] = \mathbb{E}[f(x+N_t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(x+k)\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

Da für $f\in C_b(\mathbb{Z})$ und $t\geq 0$

$$\|P_t f - f\|_\infty = \sup_x \left| \sum_{k=1}^{\infty} f(x+k)\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} - (1-e^{-\lambda t})f(x)\right|$$

$$\leq \|f\|_\infty e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!} + \|f\|_\infty(1-e^{-\lambda t})$$

$$= 2(1-e^{-\lambda t})\|f\|_\infty \xrightarrow[t\downarrow 0]{} 0$$

ist $(P_t)_{t\geq 0}$ stark stetig und wegen $\|P_t f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ für alle $f\in C_b(\mathbb{Z})$ auch eine Kontraktion. Setze

$$(Gf)(x) := \lambda\left(f(x+1)-f(x)\right), \quad f\in C_b(\mathbb{Z}),\ x\in\mathbb{Z}$$

Dann gilt für jedes $t > 0$ und $f \in C_0(\mathbb{Z})$

$$\left\| \frac{1}{t}(P_t f - f) - Gf \right\|_\infty$$

$$= \sup_x \left| \frac{1}{t} \sum_{k=2}^{\infty} f(x+k) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} + \lambda (e^{-\lambda t} - 1) f(x+1) + \frac{1}{t}(e^{-\lambda t} - 1 + \lambda t) f(x) \right|$$

$$\leq \frac{1}{t} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \|f\|_\infty + \lambda (1 - e^{-\lambda t}) \|f\|_\infty + \frac{1}{t}\left(e^{-\lambda t} - 1 + \lambda t\right) \|f\|_\infty$$

$$= \left(\frac{1}{t}\left(1 - (1+\lambda t) e^{-\lambda t}\right) + \lambda (1 - e^{-\lambda t}) + \frac{1}{t}\left(e^{-\lambda t} - 1 + \lambda t\right)\right) \|f\|_\infty$$

Also,

$$\lim_{t \downarrow 0} \left\| \frac{1}{t}(P_t f - f) - Gf \right\| = 0,$$

d.h. G ist der Generator von $(P_t)_{t \geq 0}$ mit $D(G) = C_0(\mathbb{Z})$.

Bem.: Sei $(P_t)_{t\geq 0}$ eine Familie beschränkter, linearer Operatoren auf einem Banachraum B, die schwach stetig in $t=0$ ist, d.h.

$$\lim_{t\downarrow 0} |F(P_t f) - F(f)| = 0 \qquad \forall f\in B,\ F\in B^*$$

Dann ist $(P_t)_{t\geq 0}$ stark stetig.

Bem.: Sei $(P_t)_{t\geq 0}$ die zur Brownschen Übergangsfunktion P^{BM} auf $\mathbb{R}^d$ gehörende konservative Halbgruppe. Dann ist $(P_t)_{t\geq 0}$ auf $B(\mathbb{R}^d)$ nicht schwach stetig, denn für $f = \mathbb{1}_{\{0\}}$ und $F \in B(\mathbb{R}^d)^*$ mit $F(g) := g(0)$ für alle $g\in B(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\lim_{t\downarrow 0} |F(P_t f) - F(f)| = \lim_{t\downarrow 0} |(P_t f)(0) - f(0)| = |0-1| = 1.$$

Aufgabe: Sei $(P_t)_{t\geq 0}$ die zur Brownschen Übergangsfunktion P^{BM} auf $\mathbb{R}^d$ gehörende Halbgruppe. Zeige

a) $(P_t)_{t\geq 0}$ ist stark stetig auf $C_0(\mathbb{R}^d)$.

b) $(P_t f)(x)$ ist stetig in $t=0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

Aber $(P_t)_{t\geq 0}$ ist nicht stark stetig.

Bsp. 21: Im folgenden soll der Generator der zur Brownschen Übergangsfunktion P^{BM} auf $\mathbb{R}^d$ gehörenden Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ auf $C_0(\mathbb{R}^d)$ bestimmt werden.

Betrachte dazu

$$C_0^2(\mathbb{R}^d) \equiv C_0^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) := \{ f \in C_0(\mathbb{R}^d) \cap C^2(\mathbb{R}^d) : \partial_{ij}^2 f \in C_0(\mathbb{R}^d) \quad \forall i,j \in \{1,\dots,d\} \}$$

Für $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ ergibt sich dann mittels Taylorentwicklung

$$f(x+y) = f(x) + \sum_{i=1}^d \partial_i f(x) y_i + \int_0^1 (1-\vartheta) \sum_{i,j=1}^d \partial_{ij}^2 f(x-\vartheta y) y_i y_j \, d\theta$$

Damit ergibt sich dann

$$\frac{1}{t}\left((P_t f)(x) - f(x)\right) = \frac{1}{t}\left(\mathbb{E}_x\left[f(B_t)\right] - f(x)\right) = \frac{1}{t}\,\mathbb{E}\left[f(x+B_t) - f(x)\right]$$

$$= 0 + \frac{1}{2t} \sum_{i,j=1}^d (\partial_{ij}^2 f)(x) \underbrace{\mathbb{E}\left[(B_t)_i (B_t)_j\right]}_{= t\, \mathbb{1}_{i=j}}$$

$$+ \sum_{i,j=1}^d \int_0^1 (1-\vartheta) \underbrace{\mathbb{E}\left[\left(\partial_{ij}^2 f(x-\vartheta B_t) - \partial_{ij}^2 f(x)\right) \frac{1}{t} (B_t)_i (B_t)_j\right]}_{=: R_{ij}(x,\vartheta,t)} d\theta$$

Also,

$$\frac{1}{t}\left((P_t f)(x) - f(x)\right) = \frac{1}{2}(\Delta f)(x) + \sum_{i,j=1}^d \int_0^1 (1-\vartheta) R_{ij}(x,\theta,t) \, d\theta$$

wobei $\Delta = \sum_{i=1}^d \partial_{ii}^2 f$ der Laplace-Operator ist.

Zu zeigen! $\sum_{i,j=1}^{d} \int_0^1 (1-\theta) R_{ij}(x,\theta,t)\, d\theta \xrightarrow[t \downarrow 0]{} 0$ gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}^d$

Zunächst einmal ist $\partial_{ij}^2 f$ gleichmäßig stetig. Weiterhin gilt

$$|R_{ij}(x,\theta,t)|$$

$$\leq \mathbb{E}\Big[\big| \partial_{ij}^2 f(x+\theta B_t) - \partial_{ij}^2 f(x) \big| \tfrac{1}{t} \big| (B_t)_i (B_t)_j \big| \Big]$$

$$\leq \mathbb{E}\Big[\big| \partial_{ij}^2 f(x+\theta B_t) - \partial_{ij}^2 f(x) \big| \, \| B_t/\sqrt{t} \|^2 \big(\mathbb{1}_{\|B_t\| \leq k\sqrt{t}} + \mathbb{1}_{\|B_t\| > k\sqrt{t}} \big) \Big]$$

$$\leq k^2 \underbrace{\sup_{|z-z'| \leq k\sqrt{t}} \big| \partial_{ij}^2 f(z) - \partial_{ij}^2 f(z') \big|}_{\xrightarrow[t \downarrow 0]{} 0} + 2 \|\partial_{ij}^2 f\|_\infty \underbrace{\mathbb{E}\big[\|B_1\|^2 \mathbb{1}_{\|B_1\| > k} \big]}_{\xrightarrow[k \to \infty]{} 0}$$

Daraus folgt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d, \theta \in [0,1]} |R_{ij}(x,\theta,t)| \xrightarrow[\substack{t \downarrow 0 \\ k \to \infty}]{} 0$$

Folglich ist $C_0^2(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{D}(G)$ und $Gf = \frac{1}{2} \Delta f$ für $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$.

__Bem.:__ (i) Man kann sogar zeigen, daß für $d=1$ gilt $D(\Delta) = C_0^2(\mathbb{R})$.

(ii) Für $d \geq 2$ ist der Laplace-Operator mit Definitionsbereich $C_0^2(\mathbb{R}^d)$ nicht abgeschlossen in $C_0(\mathbb{R}^d)$, d.h. $C_0^2(\mathbb{R}^d) \subsetneq D(\Delta)$

__Bem.:__

$$(X_t)_{t\geq 0} \text{ Markovprozeß } \underset{\text{Satz 2.6}}{\overset{\text{Satz 2.8}}{\rightleftarrows}} P(t,x,A) \underset{\text{Satz 3.1}}{\overset{\text{Satz 3.3}}{\rightleftarrows}} (P_t)_{t\geq 0} \xrightarrow[\text{Satz 3.5}]{} (G, D(G))$$

__Aufgabe:__ Betrachte den Cauchy-Prozeß auf $\mathbb{R}$. Hierbei handelt es sich um einen Markovprozeß, dessen Übergangsfunktion P die Dichte

$$p(t,x,y) = \frac{t}{\pi\left(t^2 + (x-y)^2\right)}$$

besitzt. Zeige, daß der infinitesimale Generator G auf allen Funktionen $f \in C_0^2$ definiert ist mit

$$Gf(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y) - f(x) - f'(x)\arctan(y-x)}{(y-x)^2}\, dy$$