3. Halbgruppen linearer Operatoren, Resolventen und Generatoren

Notation: (E,d) metrischer Raum, $\mathcal{B}(E)$ zugehörige Borel-σ-Algebra

$B(E) \equiv B(E,\mathbb{R})$: Banachraum aller beschränkten, meßbaren Funktionen $f: E \to \mathbb{R}$

bzgl. $\|f\|_\infty := \sup_{x \in E} |f(x)|$ (Supremumsnorm)

$C_b(E) \equiv C_b(E,\mathbb{R})$: Banachraum aller beschränkten, stetigen Funktionen $f: E \to \mathbb{R}$

bzgl. der Supremumsnorm $(C_b(E) \subseteq B(E))$

Falls (E,d) ein lokalkompakter, separabler, metrischer Raum ist (z.B $\mathbb{R}^d$):

$C_0(E) \equiv C_0(E,\mathbb{R})$: Banachraum aller beschränkten, stetigen Funktionen $f: E \to \mathbb{R}$

bzgl. der Supremumsnorm, die im "Unendlichen verschwinden":

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K \subseteq E \text{ kompakt} : \; |f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in E \setminus K$$

$(C_0(E) \subseteq C_b(E)$ und $C_0(E) = C_b(E)$ falls E kompakt$)$

3.1 Übergangsfunktionen und Halbgruppen linearer Operatoren

Definition (sub-Markovsche Halbgruppe)

Eine Familie $(P_t)_{t \geq 0}$ beschränkter, linearer Operatoren auf $\mathcal{B}(E)$ heißt sub-Markovsche Halbgruppe, falls für alle $s, t \geq 0$

(i) $P_t : \mathcal{B}(E) \to \mathcal{B}(E)$

(ii) $0 \leq P_t f \leq 1$ für alle $f \in \mathcal{B}(E)$ mit $0 \leq f \leq 1$

(iii) $P_{s+t} = P_s \circ P_t$

(iv) $P_t f_n \downarrow 0$ für alle $(f_n) \subseteq \mathcal{B}(E)$ mit $f_n \downarrow 0$

Eine sub-Markovsche Halbgruppe heißt normal, falls $P_0 = I$ und konservativ, falls $P_t 1 = 1$ für alle $t \geq 0$.

Frage: Welcher Zusammenhang besteht zwischen Übergangsfunktionen und sub-Markovschen Halbgruppen?

Satz 3.1 Sei P eine sub-Markovsche Übergangsfunktion auf $(E, \mathcal{B}(E))$ und definiere für alle $f \in B(E)$, $x \in E$ und $t \geq 0$

$$(P_t f)(x) := \int_E f(y)\, P(t, x, dy)$$

Dann ist $(P_t)_{t \geq 0}$ eine sub-Markovsche Halbgruppe. Falls P zudem normal ist, so ist auch $(P_t)_{t \geq 0}$ normal. Ist P eine Markovsche Übergangsfunktion, so ist $(P_t)_{t \geq 0}$ konservativ.

Beweis: Übung

<u>Satz 3.2</u> Sei X ein Lévy-Prozeß. Setze $P(t,x,A) := \mathbb{P}[X_t + x \in A]$ für $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt für die zugehörige sub-Markovsche Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$P_t C_0(\mathbb{R}^d) \subseteq C_0(\mathbb{R}^d) \qquad \forall\, t \geq 0.$$

<u>Beweis</u>: Sei $(P_t)_{t\geq 0}$ die zu X gehörende sub-Markovsche Halbgruppe, die mittels Satz 3.1 konstruiert sei. Aus Korollar 2.11 folgt

$$P_t C_b(\mathbb{R}^d) \subseteq C_b(\mathbb{R}^d) \qquad \forall\, t \geq 0$$

Sei nun $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $L > 0$ so, daß

$$|f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, |z| > L \quad \text{und} \quad P(t,0,\mathbb{R}^d \setminus [-L,L]^d) < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}$$

Dann gilt für alle $|x| > 2L$

$$|(P_t f)(x)| \leq \int_{|y|<L} \underbrace{|f(x+y)|}_{<\frac{\varepsilon}{2},\ \text{da } |x-y|>L} P(t,0,dy) + \int_{|y|>L} |f(x+y)|\, P(t,0,dy)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|f\|_\infty P(t,0,\mathbb{R}^d \setminus [-L,L]^d) < \varepsilon$$

□

Definition (Feller- und C_0-Übergangsfunktion)

Eine sub-Markovsche Übergangsfunktion P heißt Fellersche Übergangsfunktion, falls die zugehörige Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ die Eigenschaft $P_t C_b(E) \subseteq C_b(E)$, $t \geq 0$ besitzt.

Weiterhin heißt P eine C_0-Übergangsfunktion, falls $P_t C_0(E) \subseteq C_0(E)$, $t \geq 0$ ist.

Satz 3.3 Sei E ein lokalkompakter, separabler, metrischer Raum und $(P_t)_{t\geq 0}$ eine Familie von beschränkten, linearen Operatoren mit $P_t : C_0(E) \to C_0(E)$ und

(i) $P_0 = I$ und $P_{s+t} = P_s \circ P_t$ $(s,t \geq 0)$

(ii) $\| P_t \| \leq 1$ für alle $t \geq 0$

(iii) $0 \leq P_t f \leq 1$ für alle $f \in C_0(E)$ mit $0 \leq f \leq 1$

Dann existiert eine eindeutig bestimmte C_0-Übergangsfunktion P auf $(E, \mathcal{B}(E))$ so, daß die zugehörige Halbgruppe auf $C_0(E)$ mit $(P_t)_{t\geq 0}$ übereinstimmt.

Beweis: Zu gegebenem $t \geq 0$ und $x \in E$ definiere folgendes Funktional F auf $C_0(E)$

$$C_0(E) \ni f \longmapsto F(f) := (P_t f)(x) \in \mathbb{R}$$

Dann folgt aus (ii) und (iii), daß F nichtnegativ und beschränkt ist mit $\|F\| \leq 1$.

Aus dem Satz von Riesz-Markov* folgt dann die Existenz eines eindeutigen Radonmaßes $P(t,x,.)$ auf $(E, \mathcal{B}(E))$ mit

$$F(f) = \int_E f(y)\, P(t,x,dy) \qquad \forall f \in C_0(E)$$

Zudem gilt

$$P(t,x,E) = \sup\{F(f) : f \in C_0(E) \text{ mit } 0 \leq f \leq 1\} = \|F\| \leq 1$$

Folglich ist $P(t,x,.)$ ein sub-Wahrscheinlichkeitsmaß.

---

* vgl. Tiara, Theorem 3.41

zu zeigen: $x \longmapsto P(t,x,A)$ ist $\mathcal{B}(E)$-meßbar $\forall A \in \mathcal{B}(E)$, $t \geq 0$

Schritt 1 Für $A \subseteq E$ offen definiere $f_n(x) := \min\{1, n\, d(x, E\setminus A)\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Da $x \longmapsto d(x, E\setminus A)$ stetig ist, gilt $f_n \in C_0(E)$ und $f_n \uparrow \mathbb{1}_A$. Somit folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} (P_t f_n)(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(y)\, P(t,x,dy) = P(t,x,A)$$

Andererseits ist $P_t f_n \in C_0(E)$ nach Voraussetzung und folglich meßbar für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Da der punktweise Grenzwert meßbarer Funktionen meßbar ist, folgt

$$x \longmapsto P(t,x,A) \text{ ist } \mathcal{B}(E)\text{-meßbar } \forall A \subseteq E \text{ offen}, \ t \geq 0$$

Schritt 2 Da für jedes $t \geq 0$ das Mengensystem

$$\mathcal{D} = \{ A \in \mathcal{B}(E) : x \longmapsto P(t,x,A) \text{ ist } \mathcal{B}(E)\text{-meßbar} \}$$

ein Dynkin-System ist, folgt aus dem Hauptsatz über Dynkin-Systeme und Schritt 1, daß $\mathcal{D} = \mathcal{B}(E)$.

<u>Zu zeigen:</u> P genügt der Chapman-Kolmogorov-Gleichung

Aus (i) folgt für alle $f \in C_0(E)$, $x \in E$ und $s,t \geq 0$

$$\int_E f(y)\, P(s+t,x,dy) = (P_{s+t} f)(x) = (P_s(P_t f))(x)$$
$$= \int_E \left(\int_E f(y)\, P(t,z,dy) \right) P(s,x,dz)$$
$$= \int_E f(y) \int_E P(t,z,dy)\, P(s,x,dz)$$

Die Eindeutigkeitsaussage im Satz von Riesz-Markov impliziert somit

$$P(s+t,x,A) = \int_E P(t,y,A)\, P(s,x,dy) \qquad \forall A \in \mathcal{B}(E)$$

$\square$

<u>Bem:</u> Unter den obigen Voraussetzungen gilt:

$$(X_t)_{t\geq 0} \text{ Markovprozeß } \underset{\text{Satz 2.6}}{\overset{\text{Satz 2.8}}{\rightleftarrows}} P(t,x,A) \underset{\text{Satz 3.1}}{\overset{\text{Satz 3.3}}{\rightleftarrows}} (P_t)_{t\geq 0}$$

3.2. Halbgruppen linearer Operatoren und Generatoren

Frage: Wie läßt sich eine Halbgruppe linearer Operatoren effizient charakterisieren?

Notation: Sei B ein Banachraum und bezeichne mit B^* den zugehörigen Dualraum, d.h. den Raum der beschränkten, linearen Funktionale $F: B \to \mathbb{R}$.

Seien nun $(f_n) \subseteq B$ und $f \in B$. Dann heißt

- stark konvergent : $f_n \xrightarrow{s} f \quad :\Leftrightarrow \quad \| f_n - f \| \to 0$
- schwach konvergent : $f_n \xrightarrow{w} f \quad :\Leftrightarrow \quad F(f_n) \to F(f) \quad \forall F \in B^*$

Weiterhin heißt eine Folge (Q_n) beschränkter, linearer Operatoren auf B

- gleichmäßig konvergent : $Q_n \xrightarrow{u} Q \quad :\Leftrightarrow \quad \| Q_n - Q \| \to 0$
- stark konvergent : $Q_n \xrightarrow{s} Q \quad :\Leftrightarrow \quad \| Q_n f - Q f \| \to 0 \quad \forall f \in B$
- schwach konvergent : $Q_n \xrightarrow{w} Q \quad :\Leftrightarrow \quad F(Q_n f) \to F(Qf) \quad \forall f \in B, F \in B^*$

Hierbei ist $\| Q \| := \sup\limits_{\|f\|=1} \| Qf \|$ und $\| F \| := \sup\limits_{\|f\|=1} | F(f) |$.

Definition (Kontraktionshalbgruppe)

Eine Familie $(P_t)_{t\geq 0}$ beschränkter, linearer Operatoren auf B heißt Halbgruppe linearer Kontraktionen (oder Kontraktionshalbgruppe), falls

(i) $P_0 = I$ und $P_{s+t} = P_s \circ P_t \quad (s,t \geq 0)$

(ii) $\| P_t \| \leq 1 \quad \forall t \geq 0$

Definition (stark stetige Kontraktionshalbgruppe)

Sei $(P_t)_{t\geq 0}$ eine Halbgruppe linearer Kontraktionen auf B. Dann heißt

$$B_0 := \left\{ f \in B : \lim_{t \downarrow 0} \| P_t f - f \| = 0 \right\} \subseteq B$$

Definitionsbereich der starken Stetigkeit. Falls $B_0 = B$ ist, so heißt $(P_t)_{t\geq 0}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe.

Lemma 3.4: Sei $(P_t)_{t\geq 0}$ eine Kontraktionshalbgruppe auf $\mathcal{B}$. Dann gilt:

a) $\mathcal{B}_0$ ist ein Banachraum

b) $P_t \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}_0 \quad \forall t \geq 0$

c) $f \in \mathcal{B}_0 \iff P_{t+h} f \xrightarrow[h \downarrow 0]{s} P_t f \quad \forall t \geq 0$

Beweis: a) $\mathcal{B}_0$ ein Vektorraum, denn für $f, g \in \mathcal{B}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\| P_t(af+bg) - (af+bg) \| \leq |a| \, \|P_t f - f\| + |b| \, \|P_t g - g\| \xrightarrow[t \downarrow 0]{} 0$$

Also $af+bg \in \mathcal{B}_0$.

Zu zeigen: $\mathcal{B}_0$ ist abgeschlossen in $\mathcal{B}$

Sei $(f_n) \subseteq \mathcal{B}_0$ mit $f_n \xrightarrow{s} f \in \mathcal{B}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|P_t f - f\| &= \| P_t f_n - f_n + P_t(f-f_n) - (f-f_n) \| \\ &\leq \| P_t f_n - f_n \| + \underbrace{\|P_t\|}_{\leq 1} \|f_n - f\| + \|f_n - f\| \\ &\leq \| P_t f_n - f_n \| + 2 \|f_n - f\| \end{aligned}$$

Also,

$$\limsup_{t \downarrow 0} \|P_t f - f\| \leq 2\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow \quad f \in B_0$$

b) Sei nun $f \in B_0$ und $t \geq 0$. Dann gilt für jedes $h > 0$

$$\|P_h(P_t f) - P_t f\| = \|P_t(P_h f - f)\| \leq \|P_t\| \, \|P_h f - f\| \leq \|P_h f - f\|$$

Folglich erhält man

$$\limsup_{h \downarrow 0} \|P_h(P_t f) - P_t f\| = 0 \quad \Rightarrow \quad P_t f \in B_0$$

c) "$\Rightarrow$" folgt direkt aus b), "$\Leftarrow$" setze einfach $t = 0$. $\square$

<u>Definition</u> (Generator)

Sei $(P_t)_{t\geq 0}$ eine Kontraktionshalbgruppe auf B. Ein linearer Operator $G : D(G) \to B$,

$$D(G) := \left\{ f \in B : \operatorname*{s-lim}_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(P_t f - f) \text{ existiert} \right\} \subseteq B$$

heißt (infinitesimaler) Generator von $(P_t)_{t\geq 0}$, falls

$$Gf = \operatorname*{s-lim}_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(P_t f - f) \qquad \forall f \in D(G).$$

Bem.: Im allgemeinen ist G kein beschränkter Operator.

Sei $(P_t)_{t\geq 0}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf B. Definiere für

für $0 \leq a < b < \infty$ und $f \in B$

$$B \ni \int_a^b P_s f \, ds := \underset{n\to\infty}{s\text{-}\lim} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) P_{s_k} f ,$$

wobei für jedes $n \in \mathbb{N}$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ eine Partition von $[a,b]$ ist mit

$\max_{1\leq k\leq n} |t_k - t_{k-1}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ und $s_k \in [t_{k-1}, t_k)$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Aufgabe: Sei $(P_t)_{t\geq 0}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe auf B. Zeige

a) $\left\| \int_a^b P_s f \, ds \right\| \leq \int_a^b \|P_s f\| \, ds$, $f \in B$ und $0 \leq a < b < \infty$

b) $\underset{h\downarrow 0}{s\text{-}\lim} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} P_s f \, ds = P_t f$, $f \in B$ und $t \geq 0$

c) $P_t \left(\int_a^b P_s f \, ds \right) = \int_{a+t}^{b+t} P_s f \, ds$, $f \in B$ und $0 \leq a < b < \infty$

Satz 3.5: Sei G der Generator einer Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ linearer Kontraktionen auf B. Dann gilt

a) $\overline{D(G)} = B_0$ und $G\,D(G) \subseteq B_0$. Insbesondere ist $\int_0^t P_s f\,ds \in D(G)$ für alle $f \in B_0$, $t \geq 0$ und

$$P_t f - f = G\left(\int_0^t P_s f\,ds\right)$$

b) Für beliebiges $f \in D(G)$ und $t \geq 0$ ist $P_t f \in D(G)$ und

$$\frac{d}{dt} P_t f := \underset{h\to 0}{\text{s-lim}}\ \frac{1}{h}\left(P_{t+h} f - P_t f\right) = P_t G f = G P_t f$$

Insbesondere

$$P_t f - f = \int_0^t G P_s f\,ds = \int_0^t P_s G f\,ds$$

c) Der Operator G ist abgeschlossen, d.h. für $(f_n) \subseteq D(G)$ mit $f_n \xrightarrow{s} f \in B$ und $G f_n \xrightarrow{s} g \in B$ gilt $f \in D(G)$ und $Gf = g$.

Beweis: a) Zu zeigen: $\mathcal{D}(G) \subseteq B_0$

Sei $f \in \mathcal{D}(G)$. Dann existiert für jedes $c > 0$ ein $h_0 > 0$ so, daß für alle $h < h_0$

$$\left\| \frac{1}{h} (P_h f - f) - Gf \right\| < c$$

Daraus folgt dann für alle $\varepsilon > 0$ und $t < \delta := \min\{h_0, \varepsilon / 2(c + \|f\|/h_0)\}$

$$\begin{aligned} \| P_t f - f \| &= t \left\| \frac{1}{t} (P_t f - f) - Gf - \frac{1}{h_0} (P_{h_0} f - f) + Gf + \frac{1}{h_0} (P_{h_0} f - f) \right\| \\ &\leq t \left(\left\| \frac{1}{t} (P_t f - f) - Gf \right\| + \left\| \frac{1}{h_0} (P_{h_0} f - f) - Gf \right\| \right) + \frac{t}{h_0} \| P_{h_0} f - f \| \\ &\leq 2tC + 2 \frac{t}{h_0} \|f\| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Also ist $f \in B_0$.

Zu zeigen: $\mathcal{D}(G)$ liegt dicht in B_0

Sei zunächst einmal $f \in B_0$. Dann folgt aus Lemma 3.4 und der obigen Aufgabe

$$\frac{1}{h}(P_h - I)\int_0^t P_s f\,ds = \frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} P_s f\,ds - \int_0^t P_s f\,ds\right) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} P_s f\,ds - \frac{1}{h}\int_0^h P_s f\,ds$$

Da nun aber der starke Grenzwert der rechten Seite existiert, folgt

$$\int_0^t P_s f\,ds \in D(G) \quad \text{und} \quad G\int_0^t P_s f\,ds = P_t f - f$$

Setze daher nun $f_n := n\int_0^{1/n} P_s f\,ds$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(f_n) \subseteq D(G)$ und

$$\underset{n\to\infty}{s\text{-}\lim} f_n = f \quad \Rightarrow \quad D(G) \text{ ist dicht in } B_0$$

Zu zeigen: $\quad G\,D(G) \subseteq B_0$

Sei also $f \in D(G)$. Nach a) ist $f \in B_0$. Somit folgt aus Lemma 3.4 a) und b)

$$\frac{1}{t}(P_t f - f) \in B_0 \quad \forall\, t > 0$$

Da zudem B_0 ein Banachraum ist, ist B_0 abgeschlossen, d.h.

$$Gf = \underset{t\downarrow 0}{s\text{-}\lim}\ \frac{1}{t}(P_t f - f) \in B_0$$

b) Sei nun $f \in D(G)$ und $t \geq 0$. Dann gilt

$$\frac{1}{h}\left(P_h P_t f - P_t f\right) = \frac{1}{h}\left(P_t P_h f - P_t f\right) = P_t\left(\frac{1}{h}\left(P_h f - f\right)\right) \xrightarrow[h \downarrow 0]{s} P_t G f$$

wobei benutzt wurde, daß P_t, $t \geq 0$ beschränkt ist. Also ist $P_t f \in D(G)$

und es gilt

$$\underset{h \downarrow 0}{\text{s-lim}} \frac{1}{h}\left(P_h P_t f - P_t f\right) = G P_t f \quad \text{, d.h.} \quad G P_t f = P_t G f .$$

Zu zeigen: Für alle $t > 0$ und $f \in D(G)$ gilt $\underset{h \downarrow 0}{\text{s-lim}} \frac{1}{h}\left(P_t f - P_{t-h} f\right) = P_t G f$

Betrachte dazu

$$\left\| \frac{1}{h}\left(P_t f - P_{t-h} f\right) - P_t G f \right\| \leq \underbrace{\|P_{t-h}\|}_{\leq 1} \left\| \frac{1}{h}\left(P_h f - f\right) - P_h G f \right\|$$

$$\leq \underbrace{\left\| \frac{1}{h}\left(P_h f - f\right) - G f \right\|}_{\xrightarrow[h \downarrow 0]{} 0} + \| P_h \underbrace{G f}_{\in B_0} - G f \| \xrightarrow[h \downarrow 0]{} 0$$

Also folgt die Behauptung.

Zu zeigen: Für alle $t \geq 0$ und $f \in D(G)$ gilt $P_t f - f = \int_0^t P_s G f \, ds$ (*)

Es gilt nun aber

$$\| P_t f - f - \int_0^t P_s G f \, ds \|$$

$$\leq \| P_t f - f - \frac{1}{h}(P_h - I) \int_0^t P_s f \, ds \| + \| \int_0^t P_s \left(\frac{1}{h}(P_h f - f) - Gf \right) ds \|$$

$$\leq \underbrace{\| P_t f - f - \frac{1}{h}(P_h - I) \int_0^t P_s f \, ds \|}_{\xrightarrow[h \downarrow 0]{} 0 \text{ nach a)}} + \int_0^t \underbrace{\| P_s \|}_{\leq 1} \underbrace{\| \frac{1}{h}(P_h f - f) - Gf \|}_{\xrightarrow[h \downarrow 0]{} 0} ds \xrightarrow[h \downarrow 0]{} 0$$

Also,

$$\| P_t f - f - \int_0^t P_s G f \, ds \| = 0 \iff P_t f - f = \int_0^t P_s G f \, ds = \int_0^t G P_s f \, ds$$

c) Sei nun $(f_n) \subseteq D(G)$ mit $f_n \xrightarrow{s} f \in B$ und $G f_n \xrightarrow{s} g \in B$

Zu zeigen: $f \in D(G)$ und $Gf = g$

Zusammen mit b) ergibt sich nun aber für $t > 0$

$$\left\| P_t f - f - \int_0^t P_s g \, ds \right\|$$

$$= \left\| P_t (f - f_n) - (f - f_n) + (P_t f_n - f_n) - \int_0^t P_s g \, ds \right\|$$

$$\leq \left(\|P_t\| + 1 \right) \|f_n - f\| + \left\| P_t f_n - f_n - \int_0^t P_s g \, ds \right\|$$

$$\overset{(*)}{\leq} 2 \|f_n - f\| + \left\| \int_0^t (P_s G f_n - P_s g) \, ds \right\|$$

$$\leq 2 \underbrace{\|f_n - f\|}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} 0} + \int_0^t \underbrace{\|P_s\|}_{\leq 1} \underbrace{\|G f_n - g\|}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} 0} \, ds \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Daraus folgt

$$\underset{t \downarrow 0}{\text{s-lim}} \frac{1}{t} (P_t f - f) = \underset{t \downarrow 0}{\text{s-lim}} \frac{1}{t} \int_0^t P_s g \, ds = g,$$

d.h. $f \in D(G)$ und $Gf = g$.

$\square$