2.3 Starke Markoveigenschaft

Definition (starker Markovprozeß)

Sei $(E, \mathcal{B}(E))$ ein Polnischer Raum. Ein progressiver, E-wertiger, normaler Markovprozeß X auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E})$ heißt starker Markovprozeß, falls für jede $(\mathcal{F}_t)$-optionale Zeit S und alle $x \in E$, $t \geq 0$ und $A \in \mathcal{B}(E)$ die starke Markoveigenschaft gilt:

$$\mathbb{P}_x\left[X_{S+t} \in A, S<\infty \mid \mathcal{F}_S^+\right] = \mathbb{1}_{S<\infty} \mathbb{P}_{X_S}\left[X_t \in A\right] \qquad \mathbb{P}_x\text{-f.s.}$$

Bem.: 1. Nach Satz 1.7 ist X_S definiert auf $\{S<\infty\}$ $\mathcal{F}_S^+$-meßbar

2. Ist S eine $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeit und X ein starker Markovprozeß, so gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x\left[X_{S+t} \in A, S<\infty \mid \mathcal{F}_S\right] &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_x\left[X_{S+t} \in A, S<\infty \mid \mathcal{F}_S^+\right] \mid \mathcal{F}_S\right] \\ &= \mathbb{1}_{S<\infty} \mathbb{P}_{X_S}\left[X_t \in A\right] \qquad \mathbb{P}_x\text{-f.s.}\end{aligned}$$

Bsp 17: Sei X ein stetiger Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0})$ mit Werten in $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$P(t,x,A) := \begin{cases} \int_A (2\pi t)^{-1/2} \exp\left(-(x-y)^2/2t\right) dy, & x \neq 0 \\ \mathbb{1}_A(0), & x = 0 \end{cases}$$

Dann ist P eine normale Markovsche Übergangsfunktion. Konstruiere nun mittels Satz 2.9 Wahrscheinlichkeitsmaße $(\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}}$ so, daß X ein (normaler) Markovprozeß ist. Nach Satz 1.6 ist X zudem progessiv. Dennoch ist X kein starker Markovprozeß.

$$S := \inf\{t \geq 0 : X_t = 0\} \equiv T_{\{0\}}$$

Nach Satz 1.8 ist S eine Stoppzeit und es gilt $\mathbb{P}_x[S<\infty] = 1$.

Angenommen die starke Markoveigenschaft gilt. Dann folgt für $x \neq 0$, $t \geq 0$

$$\underline{1} = \mathbb{P}_x[X_{S+t} \neq 0 \mid \mathcal{F}_S] = \mathbb{P}_{X_S}[X_t \neq 0] = 0 \quad \mathbb{P}_x\text{-f.s.} \quad \lightning$$

Satz 2.10: Sei X ein normaler Markovprozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E})$ mit rechtsstetigen Pfaden und Werten in $(E, \mathcal{B}(E))$, wobei (E,d) ein metrischer Raum sei. Weiterhin sei angenommen, daß die Funktion $x \mapsto \mathbb{E}_x[f(X_t)]$ stetig und beschränkt ist für alle $t \geq 0$ und $f \in C_b(E)$. Hierbei bezeichnet $C_b(E)$ die Menge aller stetigen, beschränkten Funktionen $f: E \to \mathbb{R}$. Dann ist X stark Markovsch.

Beweis: Zunächst einmal folgt aus Satz 1.6, daß X progressiv ist.

Schritt 1 Sei S eine optionale Zeit. Für $n\in\mathbb{N}$ definiere

$$S_n := \sum_{k=1}^{\infty} k2^{-n} \mathbb{1}_{(k-1)2^{-n} \leq S < k2^{-n}} + \infty \cdot \mathbb{1}_{S=\infty} .$$

Offensichtlich gilt $S_n \geq S_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} S_n(\omega) = S(\omega)$. Da zudem für jedes $t \geq 0$ ein $k \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $t \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$, so folgt zusammen mit Lemma 1.1

$$\{S_n \le t\} = \{S_n \le k2^{-n}\} = \bigcup_{\ell=1}^{k} \{S < \ell 2^{-n}\} \setminus \{S < (\ell-1)2^{-n}\} = \underbrace{\{S < k2^{-n}\}}_{\in \mathcal{F}_{k2^{-n}}} \in \mathcal{F}_t.$$

Folglich ist $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Stoppzeiten.

Sei nun $x \in E$, $t \ge 0$ und $f \in C_b(E)$ gegeben.

<u>Zu zeigen</u>: $\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{A\cap\{S<\infty\}} f(X_{S+t})] = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{A\cap\{S<\infty\}} \mathbb{E}_{X_S}[f(X_t)]]$, $A \in \mathcal{F}_S^+$

Da f stetig und beschränkt ist, so folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{A\cap\{S<\infty\}} f(X_{S+t})] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{A\cap\{S<\infty\}} f(X_{S_n+t})]$$

Weiterhin gilt

$$\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{A\cap\{S<\infty\}} f(X_{S_n+t})] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_x\Big[\mathbb{E}_x\big[\underbrace{\mathbb{1}_{A\cap\{S_n=k2^{-n}\}}}_{\in \mathcal{F}_{k2^{-n}} \text{ (wegen Lemma 1.3)}} f(X_{k2^{-n}+t}) \,\big|\, \mathcal{F}_{k2^{-n}}\big]\Big]$$

$$\overset{\text{ME}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{A\cap\{S_n=k2^{-n}\}} \mathbb{E}_{X_{k2^{-n}}}[f(X_t)]]$$

Also

$$\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{A\cap\{S<\infty\}} f(X_{S_n+t})\right] = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{A\cap\{S<\infty\}} \mathbb{E}_{X_{S_n}}\left[f(X_t)\right]\right]$$

Nach Voraussetzung ist $x \longmapsto \mathbb{E}_x[f(X_t)]$ stetig und beschränkt für $t\geq 0$ und $f\in C_b(E)$. Also ergibt sich aus

$$\mathbb{E}_{X_{S_n}}\left[f(X_t)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}_{X_S}[f(X_t)] \quad \text{punktweise auf } \{S<\infty\}$$

und dem Satz von Lebesgue, daß

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{A\cap\{S<\infty\}} \mathbb{E}_{X_{S_n}}[f(X_t)]\right] = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{A\cap\{S<\infty\}} \mathbb{E}_{X_S}[f(X_t)]\right]$$

Also,

$$\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{A\cap\{S<\infty\}} f(X_{S+t})\right] = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{A\cap\{S<\infty\}} \mathbb{E}_{X_S}[f(X_t)]\right] \quad \forall A\in\mathcal{F}_S^+$$

<u>Schritt 2</u>: Für alle abgeschlossenen $B\subseteq E$ setze $f_n(x) := \exp(-n\,d(x,B))$, $n\in\mathbb{N}$.

Da $x\longmapsto d(x,B)$ stetig ist, folgt $f_n\in C_b(E)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $f_n \downarrow \mathbb{1}_B$.

Aus Schritt 1 und dem Satz von Lebesgue folgt für alle $x \in E$, $t \geq 0$ und $A \in \mathcal{F}_S^+$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{A \cap \{S < \infty\}} \mathbb{1}_B(X_{S+t}) \right] &= \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{A \cap \{S<\infty\}} f_n(X_{S+t}) \right] \\ &= \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{A \cap \{S<\infty\}} \mathbb{E}_{X_S}[f_n(X_t)] \right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{A \cap \{S<\infty\}} \mathbb{P}_{X_S}[X_t \in B] \right] \end{aligned}$$

Also,

$$\mathbb{P}_x\left[X_{S+t} \in B, S < \infty \mid \mathcal{F}_S^+ \right] = \mathbb{1}_{S<\infty} \mathbb{P}_{X_S}[X_t \in B] \qquad \mathbb{P}_x\text{-f.s.}$$

<u>Schritt 3</u> Da das Mengensystem

$$\mathcal{D} = \left\{ B \in \mathcal{B}(E) : \mathbb{P}_x\left[X_{S+t} \in B, S<\infty \mid \mathcal{F}_S^+ \right] = \mathbb{1}_{S<\infty} \mathbb{P}_{X_S}[X_t \in B] \ \mathbb{P}_x\text{-f.s.} \right\}$$

ein Dynkin-System ist, daß nach Schritt 2 die Menge der abgeschlossenen Mengen enthält und diese einen $\cap$-stabilen Erzeuger von $\mathcal{B}(E)$ darstellen, folgt aus dem Hauptsatz über Dynkin-Systeme, $\mathcal{D} = \mathcal{B}(E)$.

$\square$

Bem.: Ist E höchstens abzählbar und X ein E-wertiger Markovprozeß, so ist $x \mapsto \mathbb{E}_x[f(X_t)]$ stetig und beschränkt für alle $f \in C_b(E)$, $t \geq 0$.

Bsp 18: Betrachte die folgende Funktion $P: [0,\infty) \times \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$

$$P(t,x,A) = \begin{cases} \mathbb{1}_{x+t \in A} & , \ x > 0 \\ \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_{x+t\in A} + \mathbb{1}_{x-t\in A}\right) & , \ x = 0 \\ \mathbb{1}_{x-t\in A} & , \ x < 0 \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, daß P eine normale Übergangsfunktion ist. Aber für $f \in C_b(\mathbb{R})$ ist die Abb. $x \mapsto g_t(x) := \int_{\mathbb{R}} P(t,x,dy)\, f(y)$ nicht stetig.

Um dies einzusehen betrachte $f(x) = \sin(x) \in C_b(\mathbb{R})$. Dann ergibt sich

$$g_t(x) = \sin(x+t)\, \mathbb{1}_{x>0} + \sin(x-t)\, \mathbb{1}_{x<0}$$

Dann erhält man für $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$

$$\lim_{x \downarrow 0} g_t(x) = \sin(t) \neq 0 \neq \sin(-t) = \lim_{x \uparrow 0} g_t(x)$$

<u>Korollar 2.11</u>: Sei X ein Lévy-Prozeß. Dann ist X ein starker Markovprozeß.

<u>Beweis:</u> Da X nach Definition rechtsstetige Pfade besitzt, ist X nach Satz 1.6. progressiv meßbar.

<u>Schritt 1</u> Setze $P(t,x,A) := \mathbb{P}[X_t + x \in A]$ für $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Aus Bsp. 12 folgt nun, daß für jedes $t \geq 0$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die Abb. $x \mapsto P(t,x,A)$ meßbar ist. Weiterhin gilt für alle $s,t \geq 0$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$P(s+t,0,A) = (\mathbb{P} \circ X_{s+t}^{-1})[A] = (\mathbb{P} \circ (X_{s+t} - X_s)^{-1} * \mathbb{P} \circ X_s^{-1})[A]$$

$$= (\mathbb{P} \circ X_t^{-1} * \mathbb{P} \circ X_s^{-1})[A]$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{z+y \in A} \, d(\mathbb{P} \circ X_t^{-1})(z) \, d(\mathbb{P} \circ X_s^{-1})(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{P(t,0,A-y)}_{= P(t,y,A)} P(s,0,dy)$$

Zusammen mit $P(t,x,A) = (\delta_x * P(t,0,\cdot))[A]$ folgt dann die Chapman-Kolmogorov-Gleichung. Zudem gilt $1 = \mathbb{P}[X_0 = 0] = \mathbb{P}[X_0 + x \in \{x\}] = P(0,x,\{x\})$.

Also ist P eine normale Übergangsfunktion. Aus dem Satz 2.9. folgt dann die Existenz einer Familie $(\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ so, daß X ein Markovprozeß ist.

<u>Schritt 2</u> : Für jedes $f\in C_b(\mathbb{R}^d)$, $t\geq 0$ und $x\in\mathbb{R}^d$ erhält man zudem

$$\int_{\mathbb{R}^d} P(t,x,dy)\, f(y) = \mathbb{E}\left[f(X_t+x)\right]$$

Die Stetigkeit der Abb. $x\mapsto \mathbb{E}[f(X_t+x)]$ folgt nun aus der Stetigkeit von f und dem Satz von Lebesgue. Also ist X stark Markovsch. $\square$

Sei $(\theta_t)_{t\geq 0}$ eine Verschiebungshalbgruppe und T eine zufällige Zeit. Definiere

$$\theta_T : \{\omega\in\Omega : T(\omega)<\infty\} \to \Omega, \quad \omega\mapsto \theta_{T(\omega)}(\omega)$$

Dann gilt

$$A = \{X_{t_1}\in A_1, \dots, X_{t_n}\in A_n\} \implies \theta_T^{-1}(A) = \{X_{t_1+T}\in A_1, \dots, X_{t_n+T}\in A_n, T<\infty\}$$

Satz 2.12 Sei X ein progressiver, normaler, E-wertiger Markovprozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E})$ und $(\theta_t)_{t\geq 0}$ eine Verschiebungshalbgruppe.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(a) X ist starke Markovsch

(b) Für $x \in E$, $t \geq 0$, $f: E \to \mathbb{R}$ meßbar und beschränkt und jede optionale Zeit S gilt:

$$\mathbb{E}_x[f(X_{S+t})\, \mathbb{1}_{S<\infty} \mid \mathcal{F}_S^+] = \mathbb{1}_{S<\infty}\, \mathbb{E}_{X_S}[f(X_t)] \qquad \mathbb{P}_x\text{-f.s.}$$

(c) Für $x \in E$, $B \in \mathcal{F}_\infty^X$ und jede optionale Zeit S gilt

$$\mathbb{P}_x[\theta_S^{-1}(B)\, \mathbb{1}_{S<\infty} \mid \mathcal{F}_S^+] = \mathbb{1}_{S<\infty}\, \mathbb{P}_{X_S}[B] \qquad \mathbb{P}_x\text{-f.s.}$$

(d) Für $x \in E$, Y eine beschränkte, $\mathcal{F}_\infty^X$-meßbare ZV und jede optionale Zeit S gilt

$$\mathbb{E}_x[Y \circ \theta_S\, \mathbb{1}_{S<\infty} \mid \mathcal{F}_S^+] = \mathbb{1}_{S<\infty}\, \mathbb{E}_{X_S}[Y] \qquad \mathbb{P}_x\text{-f.s.}$$

Beweis: Analog zu Lemma 2.1 und Satz 2.2. $\square$

Satz 2.13 (Blumenthal-0-1-Gesetz) Sei X ein starker, E-wertiger Markovprozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E})$. Dann gilt für jedes $x\in E$ und $A\in (\mathcal{F}_0^X)^+$

$$\mathbb{P}_x[A] \in \{0,1\}$$

Beweis: Sei $A\in (\mathcal{F}_0^X)^+$. Dann ergibt sich aus Satz 2.11 (d) für die optionale Zeit $S=0$ und jedes $x\in E$, daß $\mathbb{P}_x$-f.s.

$$\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_0^+] = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_A \circ \underbrace{\theta_S}_{=\vartheta_0 = \mathrm{id}} \mathbb{1}_{S<\infty} \mid \mathcal{F}_S^+] = \mathbb{1}_{S<\infty} \mathbb{E}_{X_S}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}_x[A]$$

Andererseits gilt $\mathbb{P}_x$-f.s.

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_A \mid (\mathcal{F}_0^X)^+] = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_0^+] \mid (\mathcal{F}_0^X)^+] = \mathbb{P}_x[A]$$

Also $\mathbb{P}_x[A] \in \{0,1\}$ $\square$

Satz 2.14 Sei X eine Brownsche Bewegung auf $\mathbb{R}$ und

$$T^+ := \inf\{t \geq 0 : B_t > 0\}, \quad T^- := \inf\{t \geq 0 : B_t < 0\}$$

Dann gilt $\mathbb{P}_0[T^+ = 0] = \mathbb{P}_0[T^- = 0] = 1$.

Beweis: Aus Satz 1.8 folgt, daß T^+ und T^- optionale Zeiten sind.

Zu zeigen: $\mathbb{P}_0[T^+ = 0] > 0$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{P}_0[T^+ < \tfrac{1}{n}] = 1 - \mathbb{P}_0[B_s \leq 0 \ \forall s \in [0, \tfrac{1}{n})] \geq \mathbb{P}_0[B_{1/2n} > 0] = \frac{1}{2}$$

Weiterhin gilt $\{T^+ < \frac{1}{n}\} \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \{T^+ < \frac{1}{n}\} = \{T^+ \leq 0\}$. Also

$$\mathbb{P}_0[T^+ \leq 0] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_0[T^+ < \tfrac{1}{n}] \geq \tfrac{1}{2} > 0$$

Also folgt aus Satz 2.12, da $\{T^+ = 0\} \in (\mathcal{F}_0^X)^+$ ist,

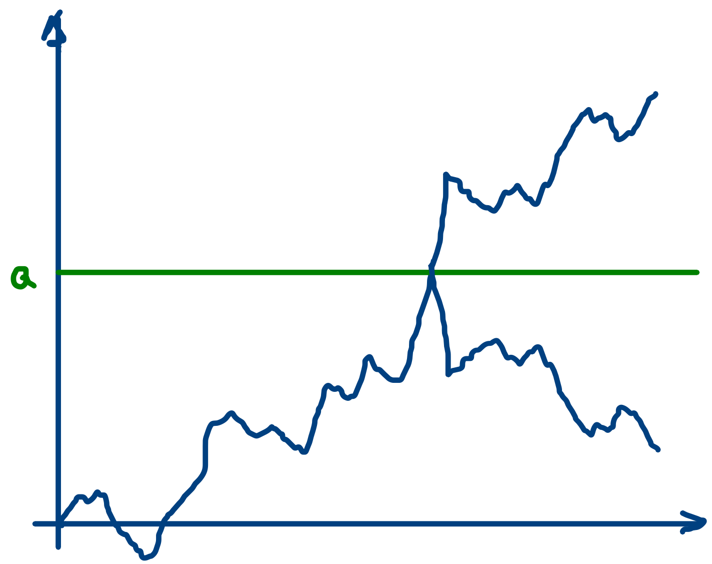
$$\mathbb{P}_0[T^+ = 0] = 1$$

$\square$

Satz 2.15 (Spiegelungsprinzip) Sei B eine Brownsche Bewegung auf $\mathbb{R}$ und $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$. Dann gilt für alle $a > 0$

$$\mathbb{P}_0[T_a \leq t] = \mathbb{P}_0[\max_{0 \leq s \leq t} B_s \geq a] = 2\, \mathbb{P}_0[B_t \geq a]$$

Beweis: Definiere folgende parameterabhängige Zufallsvariable



$$Y_s(\omega) := \begin{cases} \mathbb{1}_{B_{t-s}(\omega) \leq a}, & t \geq s \\ 0, & 0 \leq t < s \end{cases}$$

Dann ist Y_s beschränkt und $\mathcal{F}^B_\infty$-meßbar.

Weiterhin gilt $Y_s \circ \theta_s = \mathbb{1}_{B_t < a}$. Also

$$\mathbb{P}_0[T_a \leq t, B_t < a] = \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{T_a \leq t} (Y_s \circ \theta_{T_a})|_{s = T_a}]$$

Da T_a eine optionale Zeit ist, ergibt sich aus Satz 2.11 (d)

$$\mathbb{E}_0\Big[\mathbb{1}_{T_a \le t}\, \mathbb{E}_0\big[(Y_s \circ \theta_{T_a})\big|_{s=T_a} \,\big|\, \mathcal{F}^+_{T_a} \big]\Big]$$

$$= \mathbb{E}_0\Big[\mathbb{1}_{T_a \le t}\, \mathbb{E}_{B_{T_a}}[Y_s]\Big|_{s=T_a} \Big]$$

$$= \mathbb{E}_0\Big[\mathbb{1}_{T_a \le t}\, \underbrace{\mathbb{P}_a[B_{t-s} \le a]}_{=\frac{1}{2}}\Big|_{s=T_a} \Big] = \frac{1}{2}\mathbb{P}_0[T_a \le t]$$

Also,

$$\mathbb{P}_0[T_a \le t, B_t \le a] = \frac{1}{2}\mathbb{P}_0[T_a \le t]$$

Daraus folgt

$$\mathbb{P}_0[T_a \le t] = \mathbb{P}_0[T_a \le t, B_t \ge a] + \mathbb{P}_0[T_a \le t, B_t \le a]$$

$$= \mathbb{P}_0[B_t \ge a] + \frac{1}{2}\mathbb{P}_0[T_a \le t]$$

Dies ist aber äquivalent zu $\mathbb{P}_0[T_a \le t] = 2\,\mathbb{P}_0[B_t \ge a]$ $\square$

<u>Korollar 2.16</u> Sei B eine Brownsche Bewegung auf $\mathbb{R}$ und T_a wie zuvor. Dann gilt für alle $x, a \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{P}_x[T_a < \infty] = 1.$$

<u>Beweis:</u> O.B.d.A sei $x = 0$ und $a > 0$. Dann folgt aus Satz 2.14 und der Stetigkeit von $\mathbb{P}_0$

$$\mathbb{P}_0[T_a < \infty] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_0[T_a \leq n] = \lim_{n \to \infty} 2\,\mathbb{P}_0[B_n \geq a]$$

$$= \lim_{n \to \infty} 2 \int_a^\infty (2\pi n)^{-1/2} e^{-x^2/2n}\, dx$$

$$= \lim_{n \to \infty} 2 \int_{a/\sqrt{n}}^\infty (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}\, dx$$

$$= 1$$

$\square$