2.2. Markovsche Prozesse und Übergangsfunktionen

Definition (Übergangskern, Markovkern)

Sind $(E_1, \mathcal{E}_1)$ und $(E_2, \mathcal{E}_2)$ zwei Meßräume, so heißt $K : E_1 \times \mathcal{E}_2 \to [0,\infty]$ ein Übergangskern von E_1 nach E_2, falls

(i) $x \mapsto K(x,B)$ $\mathcal{E}_1$-meßbar für jedes $B \in \mathcal{E}_2$ ist,

(ii) $B \mapsto K(x,B)$ ein Maß auf $(E_2, \mathcal{E}_2)$ für alle $x \in E_1$ ist.

Gilt zudem, daß $K(x, E_2) = 1$ (bzw. $K(x,E_2) \leq 1$) ist, so heißt K ein (sub-) Markovkern.

Aufgabe: Zeige, daß das Mengensystem

$$\mathcal{D} := \{ B \in \mathcal{E}_2 : x \mapsto K(x,B) \text{ ist } \mathcal{E}_1\text{-meßbar} \}$$

ein Dynkin-System ist.

Bsp. 12: (i) Ist μ ein Maß auf $(E_2, \mathcal{E}_2)$, dann ist $K(x,.) := \mu$ für alle $x \in E_1$ ein Übergangskern.

(ii) Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ und X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{P} \circ X^{-1} = \mu$. Definiere

$$K(x,A) := \mathbb{P}[X + x \in A] = (\delta_x * \mu)[A] \qquad x \in \mathbb{R}, \; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

ein Markovkern von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}^d$. Da $\left\{ \bigtimes_{i=1}^{d} (-\infty, a_i] : a \in \mathbb{R}^d \right\}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ist und

$$x \mapsto K(x, (-\infty, a]) = \mu[(-\infty, a-x]]$$

linksstetig und daher meßbar ist, folgt die Meßbarkeit von $x \mapsto K(x,A)$ aus der obigen Aufgabe und dem Hauptsatz über Dynkin-Systeme.

Lemma 2.4: Sei K ein sub-Markovkern von $(E_1, \mathcal{E}_1)$ nach $(E_2, \mathcal{E}_2)$ und

$h : (E_1 \times E_2, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eine meßbare, beschränkte Abb. Dann ist

$$x \mapsto \varphi(x) := \int_{E_2} h(x,y)\, K(x,dy)$$

$\mathcal{E}_1$-meßbar.

Beweis: Schritt 1 Betrachte $h(x,y) := \mathbb{1}_{A \times B}(x,y)$, $A \in \mathcal{E}_1$, $B \in \mathcal{E}_2$.

Offensichtlich ist h beschränkt und $(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-meßbar. Zudem gilt

$$\varphi(x) = \int_{E_2} \mathbb{1}_{x \in A}\, \mathbb{1}_{y \in B}\, K(x,dy) = \underbrace{\mathbb{1}_{x \in A}\, K(x,B)}_{\mathcal{E}_1\text{-meßbar}}$$

Folglich ist φ eine $\mathcal{E}_1$-meßbare Funktion.

Schritt 2 Betrachte nun das Mengensystem

$$\mathcal{D} := \left\{ D \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 : x \mapsto \varphi(x) := \int_{E_2} \mathbb{1}_D(x,y)\, K(x,dy) \text{ ist } \mathcal{E}_1\text{-meßbar} \right\}$$

Zu zeigen: $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System

1. $E_1 \times E_2 \in \mathcal{D}$, da $x \longmapsto \int_{E_2} \mathbb{1}_{E_1 \times E_2}(x,y)\, K(x,dy) = K(x,E_2)$ $\mathcal{E}_1$-meßbar ist

2. Sei $D \in \mathcal{D}$. Dann gilt, daß

$$x \longmapsto \int_{E_2} \mathbb{1}_{D^c}(x,y)\, K(x,dy) = K(x,E_2) - \int_{E_2} \mathbb{1}_D(x,y)\, K(x,dy)$$

$\mathcal{E}_1$-meßbar ist. Also $D^c \in \mathcal{D}$.

3. Seien nun $D_1, D_2, \ldots \in \mathcal{D}$ disjunkt und $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Dann ist $\mathbb{1}_D = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{D_n}$,

$$x \longmapsto \int_{E_2} \mathbb{1}_D(x,y)\, K(x,dy) = \int_{E_2} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{D_n}(x,y)\, K(x,dy) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_2} \mathbb{1}_{D_n}(x,y)\, K(x,dy)$$

$\mathcal{E}_1$-meßbar. Also $D \in \mathcal{D}$.

Folglich ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System. Aus dem Hauptsatz über Dynkin-Systeme und Schritt 1 folgt daher, daß $\mathcal{D} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ ist.

<u>Schritt 3</u> Sei nun h eine nicht-negative Elementarfunktion, d.h.

$$h = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{D_k} \qquad (n \in \mathbb{N},\ a_1, \dots, a_n \geq 0 \text{ und } D_1, \dots, D_n \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$$

Dann impliziert Schritt 2, daß $x \longmapsto \int_{E_2} h(x,y)\, K(x,dy)$ $\mathcal{E}_1$-meßbar.

Ist nun h eine nicht-negative, beschränkte, meßbare Funktion. Dann existiert (h_n) von nicht-negativen Elementarfunktionen mit $h_n \uparrow h$. Aus dem Satz über die monotone Konvergenz folgt

$$\int_{E_2} h_n(x,y)\, K(x,dy) \longrightarrow \int_{E_2} h(x,y)\, K(x,dy) =: \varphi(x)$$

Also ist φ $\mathcal{E}_1$-meßbar (punktweise Grenzwert meßbarer Funktionen ist meßbar).

Für eine beliebige beschränkte, meßbare Funktion betrachte abschließend die Zerlegung $h = h^+ - h^-$. $\square$

Korollar 2.5: Ist K ein sub-Markovkern von $(E_1, \mathcal{E}_1)$ nach $(E_2, \mathcal{E}_2)$ und L ein sub-Markovkern von $(E_2, \mathcal{E}_2)$ nach $(E_3, \mathcal{E}_3)$, so ist durch

$$(L \circ K)(x, B) := \int_{E_2} L(y, B)\, K(x, dy) \quad , \qquad x \in E_1 \,,\; B \in \mathcal{E}_3$$

ein sub-Markovkern von $(E_1, \mathcal{E}_1)$ nach $(E_3, \mathcal{E}_3)$ gegeben.

Beweis: Für festes $B \in \mathcal{E}_3$ ist

$$E_1 \times E_2 \ni (x, y) \mapsto h(x, y) := L(y, B)$$

beschränkt und $(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$-meßbar. Somit folgt aus Lemma 2.4 die $\mathcal{E}_1$-Meßbarkeit von $x \mapsto (L \circ K)(x, B)$. Weiterhin gilt für feste $x \in E_1$ und $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{E}_3$ disjunkt

$$(L \circ K)\Big(x, \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \int_{E_2} \sum_{n=1}^{\infty} L(y, B_n)\, K(x, dy) \underset{\text{Beppo-Lévy}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_2} L(y, B_n)\, K(x, dy) = \sum_{n=1}^{\infty} (L \circ K)(x, B_n)$$

Also ist $(L \circ K)(x, \cdot)$ ein Maß auf $(E_3, \mathcal{E}_3)$ mit $(L \circ K)(x, E_3) \leq K(x, E_2) \leq 1$. $\square$

Bem.: 1. Sei K ein sub-Markovkern von $(E_1, \mathcal{E}_1)$ nach $(E_2, \mathcal{E}_2)$.

Definiere $(\bar{E}_2, \bar{\mathcal{E}}_2) := (E_2 \cup \{\partial\}, \sigma(\mathcal{E}_2 \cup \{\partial\}))$ sowie für $x \in E_1$

$\bar{K}(x,B) := K(x,B)$, $E_2 \supseteq B \in \bar{\mathcal{E}}_2$ und $\bar{K}(x, \{\partial\}) = 1 - K(x, E_2)$.

dann ist $\bar{K}$ ein Markovkern von $(E_1, \mathcal{E}_1)$ nach $(\bar{E}_2, \bar{\mathcal{E}}_2)$.

2. Falls K ein sub-Markovkern von $(E, \mathcal{E})$ nach $(E, \mathcal{E})$ ist, so kann K auf eindeutiger Weise zu einem Markovkern $\hat{K}$ auf $(\bar{E}, \bar{\mathcal{E}}) := (E \cup \{\partial\}, \sigma(\mathcal{E} \cup \{\partial\}))$ erweitert werden:

$$\hat{K}(x,B) := \begin{cases} K(x,B) & , E \supseteq B \in \bar{\mathcal{E}} \\ 1 - K(x,E) & , B = \{\partial\} \end{cases}, \quad x \in E$$

und $\hat{K}(\partial, B) := \mathbb{1}_{\partial \in B}$, $B \in \bar{\mathcal{E}}$.

Hierbei nennt man den Zustand $\{\partial\}$ auch Grab oder Friedhof.

Definition (Übergangsfunktion)

Eine Abbildung $P: [0,\infty) \times E \times \mathcal{E} \to [0,1]$ heißt zeithomogene (sub)-Markovsche Übergangsfunktion auf $(E,\mathcal{E})$, falls

(i) $P(t,\cdot,\cdot)$ ein (sub-) Markovkern von $(E,\mathcal{E})$ nach $(E,\mathcal{E})$ für jedes $t \in [0,\infty)$ ist.

(ii) für jedes $s,t \geq 0$ die Chapman-Kolmogorov-Gleichung gilt:

$$P(s+t,\cdot,\cdot) = P(t,\cdot,\cdot) \circ P(s,\cdot,\cdot)$$

P heißt normal, falls zusätzlich für jedes $x \in E$ gilt, daß $\{x\} \in \mathcal{E}$ und $P(0,x,\{x\}) = 1$.

Bsp 13: (Brownsche Übergangsfunktion) Definiere für $d \in \mathbb{N}$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$

$$p(t,x) := (2\pi t)^{-d/2} \exp(-|x|^2/2t)$$

Dann ist durch

$$\overset{BM}{P}(0,x,B) := \mathbb{1}_B(x) \quad \text{und} \quad \overset{BM}{P}(t,x,B) := \int_B p(t,x-y)\,dy, \quad t>0, \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

eine normale Markovsche Übergangsfunktion gegeben. Denn zum einem ist nach Bsp 12 (ii) $\overset{BM}{P}(t,\cdot,\cdot)$ ein Markovkern für jedes $t \geq 0$. Zum anderen ergibt sich mittels quadratischer Ergänzung

$$\frac{1}{2s}|x-y|^2 + \frac{1}{2t}|y-z|^2 = \frac{s+t}{2st}\left|(y-z) - \frac{t}{s+t}(x-z)\right|^2 + \frac{1}{2(s+t)}|x-z|^2 .$$

Also $\overset{BM}{P}(t,\cdot,\cdot) \circ \overset{BM}{P}(s,\cdot,\cdot)(x,B) = \int_B \int_{\mathbb{R}^d} p(t,y-z)\,p(s,x-z)\,dz\,dy = \overset{BM}{P}(s+t,x,B)$.

Da $\overset{BM}{P}(t,x,\cdot) = \mathcal{N}(0,t\cdot I)$ die Verteilung von $x + B_t$ ist, wobei B eine d-dim. Brownsche Bewegung ist, wird P Brownsche Übergangsfunktion genannt.

Bsp 14: (Brownsche Übergangsfunktion mit Reflektion) Definiere für $x \in [0,\infty)$, $B \in \mathcal{B}([0,\infty))$

$$P^{ref}(0,x,B) = \mathbb{1}_B(x) \quad \text{und} \quad P^{ref}(t,x,B) = P^{BM}(t,x,B) + P^{BM}(t,-x,B), \quad t>0$$

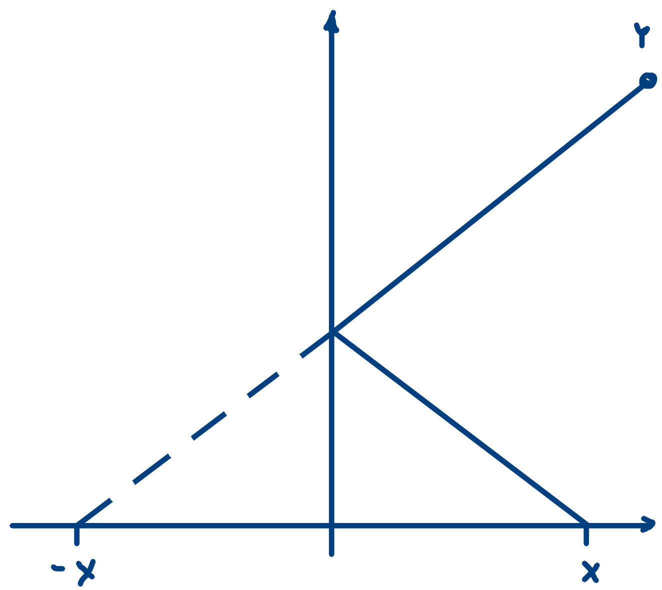
Dann ist P^{ref} eine normale Markovsche Übergangsfunktion.

Bsp 15: (Brownsche Übergangsfunktion mit Absorbtion) Definiere für $x \in [0,\infty)$, $B \in \mathcal{B}([0,\infty))$

$$P^{abs}(0,x,B) = \mathbb{1}_B(x) \quad \text{und} \quad P^{abs}(t,x,B) = P^{BM}(t,x,B) - P^{BM}(t,-x,B), \quad t>0$$

Dann ist P^{abs} eine normale sub-Markovsche Übergangsfunktion, denn für $t>0$ gilt

$$P^{abs}(t,x,[0,\infty)) = P(t,0,[-x,x]) \leq 1$$



Bsp 16: Sei P^{abs} die sub-Markovsche Übergangsfunktion der Brownschen Übergangsfunktion mit Absorbtion. Setze $E := [0,\infty) \cup \{\partial\}$ und $\mathcal{E} = \sigma\left(\mathcal{B}([0,\infty)) \cup \{\partial\}\right)$ sowie

$$\overline{P}^{abs}(t,x,B) := \begin{cases} P^{abs}(t,x,B) & , B \in [0,\infty), x \in [0,\infty) \\ 1 - P(t,0,[-x,x]) & , B \in \{\partial\}, x \in [0,\infty) \\ \mathbb{1}_{\partial \in B} & , B \in \mathcal{E}, x = \partial \end{cases}$$

Dann ist $\overline{P}^{abs}$ eine normale, Markovsche Übergangsfunktion auf dem erweiterten meßbaren Raum $(E, \mathcal{E})$.

Definition (Markovscher Prozeß)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ ein filtrierter Raum, $(E, \mathcal{B}(E))$ ein Polnischer Raum und $(\mathbb{P}_x)_{x\in E}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Ein $(\mathcal{F}_t)$-adaptierter, E-wertiger Prozeß X heißt Markovprozeß, falls

(i) für jedes $B \in \mathcal{F}_\infty^*$ die Abb. $x \mapsto \mathbb{P}_x[B]$ $\mathcal{B}(E)$-meßbar ist,

(ii) die (schwache) Markoveigenschaft gilt: für alle $x \in E$, $A \in \mathcal{B}(E)$, $s,t \geq 0$

$$\mathbb{P}_x[\, X_{t+s} \in A \mid \mathcal{F}_s \,] = \mathbb{P}_{X_s}[X_t \in A], \qquad \mathbb{P}_x\text{-f.s.} \qquad \text{(a)}$$

X heißt normal, falls zudem $\{x\} \in \mathcal{B}(E)$ und $\mathbb{P}_x[X_0 = x] = 1$ für alle $x \in E$.

Bem.: Durch maßtheoretische Induktion ergibt sich für jede beschränkte, meßbare Funktion $f: E \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}_x[f(X_{s+t}) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_{X_s}[f(X_t)] \qquad \mathbb{P}_x\text{-f.s.} \qquad \text{(b)}$$

Satz 2.6 Sei X ein Markovscher Prozeß. Dann ist $P(t,x,A) := \mathbb{P}_x[X_t \in A]$

für alle $x \in E$, $A \in \mathcal{B}(E)$, $t \geq 0$ eine Markovsche Übergangsfunktion. Hierbei

ist X genau dann normal, wenn die Übergangsfunktion P normal ist.

Beweis: Aus der Definition eines Markovprozesses folgt, daß für jedes $t \geq 0$

$P(t,\cdot,\cdot)$ ein Markovkern ist

Zu zeigen: $\quad P(s+t,\cdot,\cdot) = P(t,\cdot,\cdot) \circ P(s,\cdot,\cdot) \quad , \quad s,t \geq 0$

Für beliebige $x \in E$, $A \in \mathcal{B}(E)$, $s,t \geq 0$ gilt aber

$$P(s+t,x,A) = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_x[X_{s+t} \in A \mid \mathcal{F}_s]\right] \overset{ME}{=} \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_{X_s}[X_t \in A]\right] = \mathbb{E}_x\left[P(t,X_s,A)\right]$$

$$= \int_\Omega P(t,X_s(\omega),A)\, d\mathbb{P}_x(\omega) = \int_E P(t,y,A)\, d(\mathbb{P}_x \circ X_s^{-1})(y)$$

$$= \int_E P(t,y,A)\, P(s,x,dy) = \left(P(t,\cdot,\cdot) \circ P(s,\cdot,\cdot)\right)(x,A)$$

Falls $\{x\} \in \mathcal{B}(E)$, so ist $P(0,x,\{x\}) = \mathbb{P}_x[X_0 = x]$. Also X normal $\Leftrightarrow$ P normal.

$\square$

<u>Bem.:</u> Sei X ein Markovprozeß. Dann genügt X der (elementaren) Markoveigenschaft, denn für alle $x \in E$, $A \in \mathcal{B}(E)$ und $0 \le s \le t < \infty$ gilt

$$\mathbb{P}_x[X_t \in A \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{P}_{X_s}[X_{t-s} \in A] = \mathbb{E}_x\big[\mathbb{P}_{X_s}[X_{t-s} \in A] \mid \sigma(X_s)\big]$$

$$= \mathbb{E}_x\big[\mathbb{P}_x[X_t \in A \mid \mathcal{F}_s] \mid \sigma(X_s)\big]$$

$$\underset{\sigma(X_s) \subseteq \mathcal{F}_s}{=} \mathbb{P}_x[X_t \in A \mid \sigma(X_s)] \qquad \mathbb{P}_x\text{-f.s.}$$

<u>Lemma 2.7</u> Sei X ein Markovscher Prozeß und $(\theta_t)_{t \ge 0}$ eine Verschiebungshalbgruppe. Dann gilt für alle $s \ge 0$, $B \in \mathcal{F}^X_\infty$ und Y beschränkt, $\mathcal{F}^X_\infty$-meßbar

(i) $$\mathbb{P}_x[\theta_s^{-1}(B) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{P}_{X_s}[B] \qquad \mathbb{P}_x\text{-f.s.} \qquad (a')$$

(ii) $$\mathbb{E}_x[Y \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_{X_s}[Y] \qquad \mathbb{P}_x\text{-f.s.} \qquad (b')$$

<u>Beweis:</u> Übung

<u>Lemma 2.8</u> : Sei X ein Markovprozeß mit zugehöriger Übergangsfunktion P.

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(E)$

$$\mathbb{P}_x [X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_n} \in A_n]$$

$$= \int_{A_1} \ldots \int_{A_n} P(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, dx_n)\, P(t_{n-1} - t_{n-2}, x_{n-2}, dx_{n-1}) \ldots P(t_1, x, dx_1)$$

Insbesondere ist diese Funktion meßbar in x.

<u>Beweis</u> : Die Meßbarkeit der rechten Seite in x folgt unmittelbar aus Lemma 2.4.

Sei also $n \in \mathbb{N}$, $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(E)$. Dann ergibt sich durch vollständige Induktion über n:

$\boxed{IA}$ $n = 1$: $\mathbb{P}_x [X_{t_1} \in A_1] = P(t_1, x, A_1) = \int_{A_1} P(t_1, x, dx_1)$

$\boxed{\text{IS}}$ $n-1 \to n$: Es gilt

$$\mathbb{P}_x[X_{t_1}\in A_1,\dots,X_{t_n}\in A_n] = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{X_{t_1}\in A_1}\,\mathbb{P}_x[X_{t_2}\in A_2,\dots,X_{t_n}\in A_n\,|\,\mathcal{F}_{t_1}]\right]$$

$$= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{X_{t_1}\in A_1}\,\mathbb{P}_x[\theta_{t_1}^{-1}(B)\,|\,\mathcal{F}_{t_1}]\right],$$

wobei $B = \{X_{t_2-t_1}\in A_2,\dots,X_{t_n-t_1}\in A_n\}$ ist. Aus Lemma 2.7 folgt:

$$\mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{X_{t_1}\in A_1}\,\mathbb{P}_x[\theta_{t_1}^{-1}(B)\,|\,\mathcal{F}_{t_1}]\right]$$

$$= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{X_{t_1}\in A_1}\,\mathbb{P}_{X_{t_1}}[B]\right]$$

$$= \int_\Omega \mathbb{1}_{X_{t_1}(\omega)\in A_1}\,\mathbb{P}_{X_{t_1}(\omega)}[B]\,d\mathbb{P}_x(\omega)$$

$$= \int_E \mathbb{1}_{A_1}(x_1)\,\mathbb{P}_{x_1}[B]\,d(\mathbb{P}_x\circ X_{t_1}^{-1})(x_1)$$

$$= \int_{A_1} \mathbb{P}_{x_1}[B]\,P(t_1,x,dx_1)$$

$$\overset{\boxed{\text{IV}}}{=} \int_{A_1}\dots\int_{A_n} P(t_n-t_{n-1},x_{n-1},dx_n)\dots P(t_2-t_1,x_1,dx_2)\,P(t_1,x,dx_1)$$

$\square$

Ziel: Konstruktion eines Markovschen Prozesses

Satz 2.9: Sei P eine Markovsche Übergangsfunktion auf einem Polnischen Raum $(E, \mathcal{B}(E))$ und X ein adaptierter, E-wertiger Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^X, (\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0})$. Dann existiert eine Familie $(\mathbb{P}_x)_{x\in E}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^X)$, so daß X ein Markovprozeß mit zugehöriger Übergangsfunktion P ist.

Beweis: Schritt 1 Definiere für alle $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ und $A \in \mathcal{B}(E)^{\otimes n}$

$$\mathbb{P}_x \circ (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^{-1}[A]$$

$$:= \int_{E^n} \mathbb{1}_A(x_1, \dots, x_n)\, P(t_1, x, dx_1)\, P(t_2 - t_1, x_1, dx_2) \dots P(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, dx_n)$$

Zu zeigen: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ und $0 \leq s_1 < \dots < s_m$, $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ mit

$\{s_1, \dots, s_m\} \subseteq \{t_1, \dots, t_n\}$ gilt

$$(\mathbb{P}_x \circ (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^{-1}) \circ \pi^{-1}_{(s_1, \dots, s_m)} = \mathbb{P}_x \circ (X_{s_1}, \dots, X_{s_m})^{-1}$$

wobei $\pi_{(s_1, \dots, s_m)} : E^n \to E^m$, $x \mapsto (x_{s_1}, \dots, x_{s_m})$ ist.

Sei zunächst angenommen, daß $n = m+1$ ist, d.h. $\{s_1, \dots, s_m\} = \{t_1, \dots, t_n\} \setminus \{t_j\}$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$. Den allgemeinen Fall erhält man induktiv.

Für $j = n$ und $A \in \mathcal{B}(E)^{\otimes(n-1)}$ gilt dann:

$$(\mathbb{P}_x \circ (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^{-1}) \circ \pi^{-1}_{(t_1, \dots, t_{n-1})}[A]$$

$$= \int_{E^{n-1}} \mathbb{1}_A(x_1, \dots, x_{n-1}) \, P(t_1, x, dx_1) \, P(t_2 - t_1, x_1, dx_2) \cdots \underbrace{P(t_n - t_{n-1}, x_{t_{n-1}}, E)}_{=1}$$

$$= \mathbb{P}_x \circ (X_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}})^{-1}[A]$$

Sei nun $j \in \{1, \dots, n-1\}$ und $A \in \mathcal{B}(E)^{\otimes(n-1)}$. Dann sich mittels der Chapman-Kolmogorov-Gleichung

$$\left(\mathbb{P} \circ (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^{-1}\right) \circ \pi^{-1}_{(s_1, \dots, s_{n-1})} [A]$$

$$= \int_{E^{n-1}} \mathbb{1}_A (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)\, P(t_1, x, dx_1)\, P(t_2 - t_1, x_1, dx_2) \cdots$$

$$\cdots \underbrace{\int_E P(t_j - t_{j-1}, x_{j-1}, dx_j)\, P(t_{j+1} - t_j, x_j, dx_{j+1})}_{= P(t_{j+1} - t_{j-1}, x_{j-1}, dx_{j+1})} \cdots P(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, dx_n)$$

$$= \mathbb{P} \circ (X_{s_1, \dots, s_{n-1}})^{-1} [A]$$

Somit sind die Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P} \circ (X_{t_1, \dots, t_n})^{-1}$ konsistent.

Da $(E, \mathcal{B}(E))$ Polnisch ist, folgt aus dem Satz von Daniell-Kolmogorov die Existenz eines eindeutigen Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P} \circ X^{-1}$ auf $(E^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(E)^{\otimes [0,\infty)})$ mit der Eigenschaft

$$(\mathbb{P}_x \circ X^{-1}) \circ \bar{\pi}^{-1}_{(t_1, \dots, t_n)} = \mathbb{P}_x \circ (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$$

wobei $\bar{\pi}_{(t_1, \dots, t_n)} : E^{[0,\infty)} \to E^n$, $x \mapsto (x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$ ist.

Schritt 2: (i) Nach der obigen Aufgabe ist

$$\mathcal{D} = \{ B \in \mathcal{F}^X_\infty : x \mapsto \mathbb{P}_x[B] \text{ ist } \mathcal{B}(E)\text{-meßbar} \}$$

ein Dynkin-System. Weiterhin ist $x \mapsto \mathbb{P}_x[X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n]$ nach Lemma 2.8 meßbar für alle $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 < \dots < t_n$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(E)$.

Also folgt aus dem Hauptsatz über Dynkin-Systeme, daß $\mathcal{D} = \mathcal{F}^X_\infty$

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq s_1 < \ldots < s_n = s$ und $A, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(E)$ setze

$$B = \{ X_{s_1} \in A_1, \ldots, X_{s_{n-1}} \in A_{n-1}, X_s \in A_n \}.$$

Dann gilt

$$\mathbb{E}_x [\mathbb{1}_B \mathbb{1}_{X_{s+t} \in A}]$$

$$= \int_{E^n} \left(\prod_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}(x_k) \right) P(s_1, x, dx_1) \cdots P(s_n - s_{n-1}, x_{n-1}, dx_n) P(t, x_n, A)$$

$$= \mathbb{E}_x [\mathbb{1}_B P(t, X_s, A)]$$

Da die Menge aller derartiger Mengen B ein $\cap$-stabilen Erzeuger von $\mathcal{F}_s^X$ bilden und $\mathcal{D} = \{ D \in \mathcal{F}_s^X : \mathbb{E}_x [\mathbb{1}_D \mathbb{1}_{X_{s+t} \in A}] = \mathbb{E}_x [\mathbb{1}_D P(t, X_s, A)] \}$ ein Dynkin-System ist, so folgt aus dem Hauptsatz über Dynkin-System

$$\mathbb{P}_x [X_{s+t} \in A \mid \mathcal{F}_s^X] = P(t, X_s, A) = \mathbb{P}_{X_s} [X_t \in A] \quad \mathbb{P}_x\text{-f.s.}$$

$\square$