2. Markovsche Prozesse

Im folgenden sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ ein filtrierter Raum und $(E, \mathcal{B}(E))$ ein Polnischer (vollständig metrisierbarer, separabler) Raum.

2.1 Elementare Markoveigenschaft

Definition (Markoveigenschaft)

Sei X ein adaptierter, stochastischer Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ mit Werten in $(E, \mathcal{B}(E))$. Dann besitzt X die (elementare) Markoveigenschaft, falls für alle $A \in \mathcal{B}(E)$ und $s,t \in [0,\infty)$ mit $s \leq t$ gilt

$$\mathbb{P}[X_t \in A \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{P}[X_t \in A \mid \sigma(X_s)] \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.} \qquad (A)$$

Bem: Da E ein Polnischer Raum ist, ist die Existenz einer regulären Version der bedingten Wahrscheinlichkeit* sichergestellt.

* vgl. Klenke Korollar 8.37

Lemma 2.1: Ein adaptierter, stochastischer Prozeß X besitzt genau dann die (elementare) Markoveigenschaft, wenn für alle beschränkten, meßbaren Funktionen $f: (E, \mathcal{B}(E)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $s,t \in [0,\infty)$ mit $s \le t$

$$\mathbb{E}[\, f(X_t) \mid \mathcal{F}_s \,] = \mathbb{E}[\, f(X_t) \mid \sigma(X_s) \,] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \qquad \text{(B)}$$

Beweis: "$\Leftarrow$" Für $A \in \mathcal{B}(E)$ setze $f = \mathbb{1}_A$. Dann folgt (A) aus (B).

"$\Rightarrow$" (maßtheoretische Induktion)

Sei zunächst f eine nicht-negative Elementarfunktion, d.h. $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}$ mit $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(E)$, $a_1, \dots, a_n \ge 0$. Dann folgt aus (A)

$$\mathbb{E}[\, f(X_t) \mid \mathcal{F}_s \,] = \sum_{k=1}^{n} a_k \, \mathbb{P}[\, X_t \in A_k \mid \mathcal{F}_s \,]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \, \mathbb{P}[\, X_t \in A_k \mid \sigma(X_s) \,] = \mathbb{E}[\, f(X_t) \mid \sigma(X_s) \,]$$

$\mathbb{P}$-f.s. für alle $s,t \in [0,\infty)$ mit $s \le t$.

Sei nun f eine nicht-negative, beschränkte, meßbare Funktion. Dann existiert eine Folge (f_n) von nicht-negativen Elementarfunktionen mit $f_n \uparrow f$. Aus dem Satz über die monotone Konvergenz folgt somit

$$\mathbb{E}[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f_n(X_t) \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f_n(X_t) \mid \sigma(X_s)] = \mathbb{E}[f(X_t) \mid \sigma(X_s)]$$

$\mathbb{P}$-f.s. für alle $s,t \in [0,\infty)$ mit $s \le t$.

Für allgemeine beschränkte, meßbare Funktionen f folgt die Aussage durch $f = f^+ - f^-$.

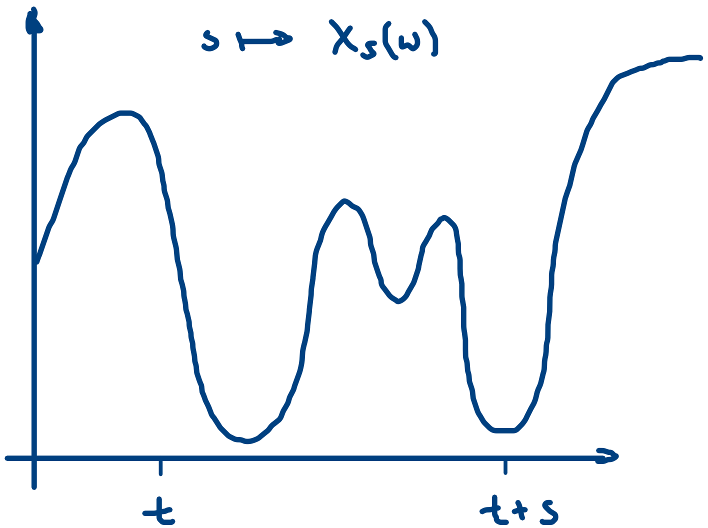
$\square$

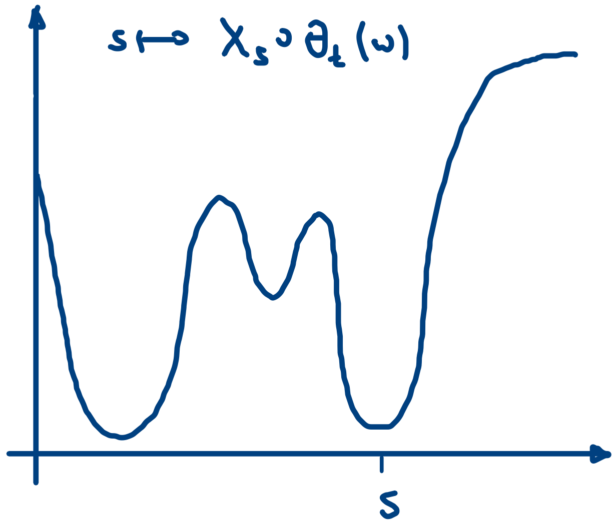
Frage: Läßt sich die (elementare) Markoveigenschaft auch auf weitere Zeitpunkte $t_1, \dots, t_n$ erweitern?

Definition (Verschiebungsoperatoren)

Eine Familie $(\theta_t)_{t \geq 0}$ von Abb. $\theta_t : \Omega \to \Omega$, $t \geq 0$ heißt Halbgruppe von Verschiebungsoperatoren für den stochastischen Prozeß X, falls für $s, t \geq 0$

(i) $\theta_0 = id$ (ii) $\theta_{s+t} = \theta_s \circ \theta_t$ (iii) $X_s \circ \theta_t = X_{s+t}$.





<u>Bem.</u>: Ist $\Omega = E^{[0,\infty)}$, $\Omega = C([0,\infty), E)$ oder $\Omega = D([0,\infty), E)$ und X ein Prozeß auf Ω in kanonischer Form, d.h. $X_t(\omega) = \omega(t)$, so existiert stets eine zugehörige Halbgruppe von Verschiebungsoperatoren

$$(\vartheta_t(\omega))_s := \omega(s+t), \quad \forall s,t \geq 0 \text{ und } \omega \in \Omega.$$

<u>Eigenschaften von $(\vartheta_t)_{t\geq 0}$</u>:

1.) $A = \{X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n\} \Rightarrow \vartheta_t^{-1}(A) = \{X_{t_1+t} \in A_1, \dots, X_{t_n+t} \in A_n\}$ für alle $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(E)$. Insbesondere ist $\vartheta_t^{-1}(\mathcal{F}_s) \subseteq \mathcal{F}_{s+t}$ für alle $s,t \geq 0$.

2.) $$\{(X_{s+t})_{s\geq 0} \in A\} = \vartheta_t^{-1}\Big(\underbrace{\{(X_s)_{s\geq 0} \in A\}}_{\in \mathcal{F}_\infty^X}\Big) \quad \forall A \in \mathcal{B}(E)^{\otimes [0,\infty)}$$

Satz 2.2: Sei X ein $(E, \mathcal{B}(E))$-wertiger, adaptierter, stochastischer Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, der der (elementaren) Markoveigenschaft genügt und (ϑ_t) eine Verschiebungshalbgruppe.

(i) Für alle $B \in \mathcal{F}_\infty^X$ und $s \geq 0$ gilt:

$$\mathbb{P}[\vartheta_s^{-1}(B) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{P}[\vartheta_s^{-1}(B) \mid \sigma(X_s)] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \qquad (A')$$

(ii) Für alle beschränkten $\mathcal{F}_\infty^X$-meßbaren, reellwertigen Zufallsvariablen Y und $s \geq 0$ gilt:

$$\mathbb{E}[Y \circ \vartheta_s \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[Y \circ \vartheta_s \mid \sigma(X_s)] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \qquad (B')$$

Bem.: 1. Für $A \in \mathcal{B}(E)$, $0 \leq s \leq t < \infty$ und $B = \{X_{t-s} \in A\} \Rightarrow \vartheta_s^{-1}(B) = \{X_t \in A\}$

2. Für eine beschränkte, meßbare Funktion $f : (E, \mathcal{B}(E)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist $Y(\omega) := f(X_{t-s}(\omega))$ eine beschränkte, $\mathcal{F}_\infty^X$-meßbare Zufallsvariable mit $Y \circ \vartheta_s(\omega) = f(X_{t-s} \circ \vartheta_s(\omega)) = f(X_t(\omega))$.

<u>Beweis:</u> (i) <u>Schritt 1</u>: Betrachte zunächst Zylindermengen der Form

$$B = \{ X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n \}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \le t_1 < \dots < t_n, \quad A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(E)$$

(Beweis durch vollständige Induktion über n)

$\boxed{\text{IA}}$ $n=1$: elementare Markoveigenschaft ✓

$\boxed{\text{IS}}$ $n-1 \to n$: Sei also $B = \{ X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n \}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}[X_{t_1+s} \in A_1, \dots, X_{t_n+s} \in A_n \mid \mathcal{F}_{t_1+s}]$$

$$= \mathbb{1}_{X_{t_1+s} \in A_1} \mathbb{P}[\underbrace{X_{t_2+s} \in A_2, \dots, X_{t_n+s} \in A_n}_{\theta_{t_1+s}^{-1}(\{ X_{t_2-t_1} \in A_2, \dots, X_{t_n-t_1} \in A_n \}) \equiv \theta_{t_1+s}^{-1}(\hat{B})} \mid \mathcal{F}_{t_1+s}]$$

$$\overset{\boxed{\text{IV}}}{=} \mathbb{1}_{X_{t_1+s} \in A_1} \mathbb{P}[\theta_{t_1+s}^{-1}(\hat{B}) \mid \sigma(X_{t_1+s})] \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Darans folgt

$$\mathbb{P}[\vartheta_s^{-1}(B) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{P}[X_{t_1+s} \in A_1, \dots, X_{t_n+s} \in A_n \mid \mathcal{F}_{t_1+s}] \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{1}_{X_{t_1+s} \in A_1}}_{\sigma(X_{t_1+s})\text{-meßbar}} \underbrace{\mathbb{P}[\vartheta_{t_1+s}^{-1}(\hat{B}) \mid \sigma(X_{t_1+s})]}_{\sigma(X_{t_1+s})\text{-meßbar}} \mid \mathcal{F}_s] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Aus dem Faktorisierungslemma* folgt die Existenz einer meßbaren Abb.

$f : (E, \mathcal{B}(E)) \to ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ mit

$$\mathbb{P}[\vartheta_{t_1+s}^{-1}(\hat{B}) \mid \sigma(X_{t_1+s})](\omega) = f(X_{t_1+s}(\omega))$$

Folglich ergibt sich aus Lemma 2.1

---

* vgl. Klenke Korollar 1.97

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\vartheta_s^{-1}(B) \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_{t_1+s}\in A_1}\, f(X_{t_1+s}) \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&\overset{(B)}{=} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_{t_1+s}\in A_1}\, f(X_{t_1+s}) \mid \sigma(X_s)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_{t_1+s}\in A_1}\, \mathbb{P}\left[\vartheta_{t_1+s}^{-1}(\hat{B}) \mid \sigma(X_{t_1+s})\right] \mid \sigma(X_s)\right] \\
&\overset{\boxed{IV}}{=} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_{t_1+s}\in A_1}\, \mathbb{P}\left[\vartheta_{t_1+s}^{-1}(\hat{B}) \mid \mathcal{F}_{t_1+s}\right] \mid \sigma(X_s)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left[X_{t_1+s}\in A_1, \dots, X_{t_n+s}\in A_n \mid \mathcal{F}_{t_1+s}\right] \mid \sigma(X_s)\right] \\
&\underset{\sigma(X_s)\subseteq \mathcal{F}_{t_1+s}}{=} \mathbb{P}\left[\vartheta_s^{-1}(B) \mid \sigma(X_s)\right] \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}
\end{aligned}
$$

<u>Schritt 2:</u> Betrachte nun das Mengensystem

$$\mathcal{D} = \{ B \in \mathcal{F}_\infty^X : \mathbb{P}[\vartheta_s^{-1}(B) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{P}[\vartheta_s^{-1}(B) \mid \sigma(X_s)] \ \mathbb{P}\text{-f.s} \} \subseteq \mathcal{F}_\infty^X$$

<u>Zu zeigen:</u> $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System

1. Da $\mathbb{P}[\vartheta_s^{-1}(\Omega) \mid \mathcal{F}_s] = 1 = \mathbb{P}[\vartheta_s^{-1}(\Omega) \mid \sigma(X_s)]$ $\mathbb{P}$-f.s. ist $\Omega \in \mathcal{D}$

2. Sei $A \in \mathcal{D}$. Dann gilt, daß $\vartheta_s^{-1}(A^c) = \vartheta_s^{-1}(A)^c$. Daraus folgt

$$\mathbb{P}[\vartheta_s^{-1}(A^c) \mid \mathcal{F}_s] = 1 - \mathbb{P}[\vartheta_s^{-1}(A) \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= 1 - \mathbb{P}[\vartheta_s^{-1}(A) \mid \sigma(X_s)] = \mathbb{P}[\vartheta_s^{-1}(A^c) \mid \sigma(X_s)] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Also $A^c \in \mathcal{D}$

3. Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ disjunkt. Da $\vartheta_s^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \bigcup_{n=1}^\infty \vartheta_s^{-1}(A_n)$ ist, folgt

$$\mathbb{P}\left[\vartheta_s^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \mid \mathcal{F}_s\right] = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}[\vartheta_s^{-1}(A_n) \mid \mathcal{F}_s]$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}[\vartheta_s^{-1}(A_n) \mid \sigma(X_s)] = \mathbb{P}\left[\vartheta_s^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \mid \sigma(X_s)\right] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Also $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{D}$.

Weiterhin ist die Menge der Zylindermengen $\mathcal{C}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{F}_\infty^X$.

Aus dem Hauptsatz über Dynkin-Systeme ergibt sich folglich

$$\mathcal{F}_\infty^X = \sigma(\mathcal{C}) = d(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{D} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_\infty^X = \mathcal{D}$$

Somit gilt (B) für alle $B \in \mathcal{F}_\infty^X$.

(ii) Aus (i) folgt die Aussage für $Y = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathcal{F}_\infty^X$. Durch die Anwendung des Verfahrens der maßtheoretischen Induktion folgt schließlich die Aussage auch für $\mathcal{F}_\infty^X$-meßbare, beschränkte Funktionen. $\square$

<u>Aufgabe</u>: Sei X ein $(E, \mathcal{B}(E))$-wertiger, adaptierter, stochastischer Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Zeige, daß X genau dann die (elementare) Markoveigenschaft besitzt, wenn für alle $s \geq 0$, $A \in \mathcal{F}_s^X$ und $B \in \mathcal{F}_\infty^X$

$$\mathbb{P}[A \cap \theta_s^{-1}(B) \mid \sigma(X_s)] = \mathbb{P}[A \mid \sigma(X_s)]\, \mathbb{P}[\theta_s^{-1}(B) \mid \sigma(X_s)] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

(A'')

Satz 2.3: Sei X ein $(E,\mathcal{B}(E))$-wertiger, adaptierter, stochastischer Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ mit unabhängigen Zuwächsen, d.h. $\mathcal{F}_s$ und $\sigma(X_t - X_s : t > s)$ sind unabhängig für alle $s \geq 0$. Dann besitzt X die (elementare) Markoveigenschaft.

Beweis: Für $A \in \mathcal{B}(E)$ setze $D_A := \{(x,y) \in E \times E : x+y \in A\} \in \mathcal{B}(E \times E)$.

Dann gilt für alle $s,t \in [0,\infty)$ mit $s \leq t$

$$\{X_t \in A\} = \{(X_t - X_s) + X_s \in A\} = \{(X_t - X_s, X_s) \in D_A\}.$$

Somit genügt es

Zu zeigen: Für alle $s,t \in [0,\infty)$ mit $s \leq t$ und $D \in \mathcal{B}(E \times E)$ gilt

$$\mathbb{P}[(X_t - X_s, X_s) \in D \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{P}[(X_t - X_s, X_s) \in D \mid \sigma(X_s)] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Schritt 1: Betrachte $D = D_1 \times D_2 \in \mathcal{B}(E \times E)$. Dann gilt für alle $0 \le s < t < \infty$

$$\mathbb{P}[(X_t - X_s, X_s) \in D \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{1}_{X_t - X_s \in D_1}}_{\substack{\text{unabhängig} \\ \text{von } \mathcal{F}_s}} \underbrace{\mathbb{1}_{X_s \in D_2}}_{\mathcal{F}_s\text{-meßbar}} \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{1}_{X_s \in D_2} \mathbb{P}[X_t - X_s \in D_1]$$

$$\|$$

$$\mathbb{P}[(X_t - X_s, X_s) \in D \mid \sigma(X_s)] = \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{1}_{X_t - X_s \in D_1}}_{\substack{\text{unabhängig} \\ \text{von } \sigma(X_s)}} \underbrace{\mathbb{1}_{X_s \in D_2}}_{\sigma(X_s)\text{-meßbar}} \mid \sigma(X_s)] = \mathbb{1}_{X_s \in D_2} \mathbb{P}[X_t - X_s \in D_1]$$

Schritt 2: Betrachte das Mengensystem

$$\mathcal{D} = \{ D \in \mathcal{B}(E \times E) : \mathbb{P}[(X_t - X_s, X_s) \in D \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{P}[(X_t - X_s, X_s) \in D \mid \sigma(X_s)] \ \mathbb{P}\text{-f.s.} \}$$

Da $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System ist (Beweis: Übung), daß das $\cap$-stabile Mengensystem $\{ D_1 \times D_2 : D_1, D_2 \in \mathcal{B}(E) \}$ enthält, folgt aus dem Hauptsatz über Dynkin-Systeme

$$\mathcal{B}(E \times E) = \sigma(\{ D_1 \times D_2 : D_1, D_2 \in \mathcal{B}(E) \}) = d(\{ D_1 \times D_2 : D_1, D_2 \in \mathcal{B}(E) \}) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}(E \times E).$$

$\square$

Definition (Lévy-Prozesse)

Ein adaptierter, $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$-wertiger, stochastischer Prozeß X auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ heißt Lévy-Prozeß, falls

(i) $\mathbb{P}[X_0 = 0] = 1$

(ii) X unabhängige Zuwächse besitzt, d.h. $\forall\ 0 \leq s < t < \infty$ sind $\sigma(X_t - X_s : t > s)$ und $\mathcal{F}_s$ unabhängig.

(iii) X stationäre Zuwächse besitzt, d.h.

$$\mathcal{L}(X_t - X_s) = \mathcal{L}(X_{t-s}) \qquad \forall\ 0 \leq s \leq t < \infty.$$

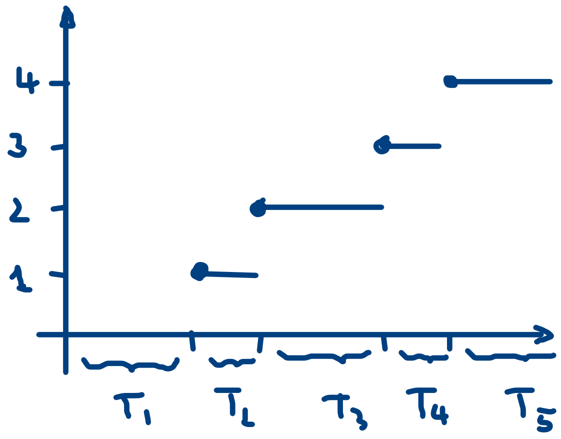
(iv) X càdlàg-Pfade besitzt.

Bsp 9: (Standard Brownsche Bewegung auf $\mathbb{R}^d$) Sei $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)$, wobei $(B_t^1)_{t\geq 0}, \ldots, (B_t^d)_{t\geq 0}$ unabhängige eindimensionale $(\mathcal{F}_t)$-BM sind.

Bsp 10: (Poissonprozeß mit Intensität $\lambda > 0$) Sei $N = (N_t)_{t \geq 0}$ ein reellwertiger Prozeß mit unabhängigen und stationären Zuwächsen (und stückweise konstanten, rechtsstetigen Pfaden), so daß $(N_t - N_s)$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda(t-s)$, $(t \geq s)$ ist.

Aufgabe: Sei (T_n) eine Folge von unabhängigen, $Exp(\lambda)$-verteilten Zufallsvariablen $\lambda > 0$. Setze $S_n := \sum_{k=1}^{n} T_k$, $n \in \mathbb{N}$ und definiere einen $\mathbb{N}_0$-wertigen càdlàg-Prozeß $N = (N_t)_{t \geq 0}$ durch

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} k \, \mathbb{1}_{S_k \leq t < S_{k+1}}, \quad t \in [0, \infty)$$



Zeige für alle $0 \leq s < t < \infty$

(a) $\mathbb{P}[S_{N_s+1} > t \mid \mathcal{F}_s^N] = e^{-\lambda(t-s)}$ $\mathbb{P}$-f.s.

(b) $(N_t - N_s)$ eine $Poi(\lambda(t-s))$-verteilte ZV die unabhängig von $\mathcal{F}_s^N$ ist

Bsp 11: (Irrfahrten auf $\mathbb{Z}^d$) Sei (Z_n) eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[Z_1 = 0] = 0$ und $(N_t)_{t \geq 0}$ ein Poissonprozeß mit Intensität $\lambda > 0$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wobei angenommen sei, daß $(N_t)_{t \geq 0}$ und $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängig sind. Setze

$$X_t := S_{N_t}, \quad t \geq 0 \quad \text{wobei} \quad S_0 := 0 \quad \text{und} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann nennt man $X = (X_t)_{t \geq 0}$ eine Irrfahrt in stetiger Zeit auf $\mathbb{Z}^d$

Beh.: X ist ein $(\mathcal{F}_t^X)$- Lévy-Prozeß

Offensichtlich ist $X_0 = 0$ und $[0, \infty) \ni t \mapsto X_t(\omega) \in \mathbb{Z}^d$ stückweise konstant und rechtsstetig. Da $\mathbb{P}[Z_n = 0] = \mathbb{P}[Z_1 = 0] = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, ist zudem die Anzahl der Sprünge von $t \mapsto X_t(\omega)$ im Intervall $(t_0, t_1]$ gegeben durch $N_{t_1}(\omega) - N_{t_0}(\omega)$.

Zu zeigen: $\mathbb{P}[X_t - X_s = x \mid \mathcal{F}_s^X] = \mathbb{P}[X_{t-s} = x]$ $\mathbb{P}$-f.s. $\forall x \in \mathbb{Z}^d, 0 \leq s < t < \infty$

Sei also $A \in \mathcal{F}_s^X$. Nach Konstruktion von X ist $A \cap \{N_s = m\}$ unabhängig von der σ-Algebra $\sigma(\{X_{m+n} - X_m : n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{N_t - N_s\})$.

Daraus folgt

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A \cap \{N_s = m\}} \mathbb{1}_{X_t - X_s = x}]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A \cap \{N_s = m\}} \mathbb{1}_{N_t - N_s = n} \mathbb{1}_{S_{m+n} - S_m = x}]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A \cap \{N_s = m\}}] \, \mathbb{E}[\mathbb{1}_{N_t - N_s = n}] \, \mathbb{E}[\mathbb{1}_{S_{m+n} - S_m = x}]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A \cap \{N_s = m\}}] \, \mathbb{E}[\mathbb{1}_{N_{t-s} = n}] \, \mathbb{E}[\mathbb{1}_{S_n = x}]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A \cap \{N_s = m\}}] \, \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_{t-s} = x} \mathbb{1}_{N_{t-s} = n}]$$
$$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A \cap \{N_s = m\}} \, \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_{t-s} = x}]]$$

Daraus folgt

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{X_t - X_s = x}] = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A \cap \{N_s = m\}} \mathbb{1}_{X_t - X_s = x}]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A \cap \{N_s = m\}} \mathbb{P}[X_{t-s} = x]]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{P}[X_{t-s} = x]]$$

Also,

$$\mathbb{P}[X_t - X_s = x \mid \mathcal{F}_s^X] = \mathbb{P}[X_{t-s} = x] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d, \ 0 \leq s < t < \infty$$

d.h. $X_t - X_s$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_s^X$ und $\mathcal{L}(X_t - X_s) = \mathcal{L}(X_{t-s})$.

<u>Aufgabe</u>: Betrachte den stochastischen Prozeß X mit $X_t := |B_t|$, wobei B eine Brownsche Bewegung in $\mathbb{R}$ ist. Bestimme $\mathbb{P}[X_t \in A]$ für $t > 0$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.