Frage: Wie sieht es mit der Meßbarkeit von Prozesse aus?

Definition: (adaptiert, progressiv meßbar, meßbar)

Sei X ein $(E, \mathcal{E})$-wertiger Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$. Dann heißt X

(i) $(\mathcal{F}_t)$-adaptiert, falls X_t $(\mathcal{F}_t, \mathcal{E})$-meßbar ist für jedes $t \geq 0$.

Die Filtration $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ mit $\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s : s \leq t)$ heißt natürliche oder von X erzeugte Filtration.

(ii) progressiv oder progressiv meßbar, falls für jedes $t \geq 0$

$$[0,t] \times \Omega \ni (s, \omega) \longmapsto X_s(\omega)$$

$(\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t)$-meßbar ist.

(iii) meßbar, falls

$$[0,\infty) \times \Omega \ni (s, \omega) \longmapsto X_s(\omega)$$

$(\mathcal{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{F})$-meßbar ist.

Bem: 1. X ist $(\mathcal{F}_t^X)$- adaptiert.

2. X ist progressiv $\Rightarrow$ X ist adaptiert und meßbar

Aber die Adaptiertheit impliziert i.A nicht die Meßbarkeit.

Bsp 8: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ ein filtrierter Raum. Definiere

$$X_t(\omega) := \mathbb{1}_A(t) \quad , \; t \geq 0 \quad \text{mit} \quad A \notin \mathcal{B}([0,\infty)).$$

Dann ist $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein Prozeß mit Werten in $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Zudem ist X_t $(\mathcal{F}_t)$-meßbar für jedes $t \geq 0$. Aber

$$(t,\omega) \mapsto X_t(\omega) \quad \text{ist nicht} \quad \mathcal{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{F}\text{-meßbar}.$$

<u>Satz 1.6</u>: Sei X ein Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ mit Werten in einem metrischen Raum (E, d) mit der σ-Algebra $\mathcal{B}(E)$. Falls X adaptiert und rechtsstetig (bzw. linksstetig) ist, so ist X progressiv meßbar.

<u>Beweis</u>: Sei X rechtsstetig und adaptiert. Für festes $t \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ definiere für alle $s \in [0, t]$

$$X_s^n(\omega) := \sum_{k=1}^{n} X_{\frac{kt}{n}}(\omega) \mathbb{1}_{\left[\frac{(k-1)t}{n}, \frac{kt}{n}\right)}(s) + X_t(\omega) \mathbb{1}_t(s), \quad \omega \in \Omega.$$

Dann gilt für jedes $A \in \mathcal{B}(E)$

$$\{ (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega : X_s^n(\omega) \in A \}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{n} \left[\frac{(k-1)t}{n}, \frac{kt}{n} \right) \times \underbrace{\{ X_{\frac{kt}{n}} \in A \}}_{\in \mathcal{F}_{\frac{kt}{n}} \subseteq \mathcal{F}_t} \cup \{t\} \times \underbrace{\{ X_t \in A \}}_{\in \mathcal{F}_t} \in \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t .$$

Also ist $[0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \mapsto X_s^n(\omega)$ $(\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t)$-meßbar.

X rechtsstetig $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} X_s^n(\omega) = X_s(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega, s \in [0,t]$

Da der punktweise Grenzwert meßbarer Funktionen auch meßbar ist, gilt

$[0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$ ist $(\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t)$-meßbar

$\square$

<u>Frage</u>: Wie muß der Beweis für linksstetige Prozesse geändert werden?

1.3. Gestoppte Prozesse und Treffzeiten

Ziel: Auswertung eines progressiven Prozesses X an einer Stoppzeit T.

Satz 1.7: Sei X ein progressiv meßbarer Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ mit Werten in $(E, \mathcal{E})$ und T eine Stoppzeit. Dann gilt:

(i) X_T definiert auf dem Ereignis $\{T < \infty\} \in \mathcal{F}_T$ ist $\mathcal{F}_T$-meßbar, d.h.

$$\forall A \in \mathcal{E} \text{ ist } \{\omega \in \Omega : X_{T(\omega)}(\omega) \in A,\ T(\omega) < \infty\} \in \mathcal{F}_T$$

(ii) Der Prozeß $X^T := (X_{T\wedge t})_{t\geq 0}$ ist progressiv.

<u>Beweis</u>: (i) <u>Zu zeigen</u>: $\{X_T \in A, T < \infty\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall A \in \mathcal{E}, t \geq 0 \quad (*)$

Sei $t \geq 0$ fest und betrachte $\varphi : \Omega \to [0,t] \times \Omega$, $\varphi(\omega) := (T(\omega) \wedge t, \omega)$.

Da T eine Stoppzeit ist, ergibt sich für jedes $s \in [0,t]$ und $B \in \mathcal{F}_t$

$$\varphi^{-1}([s,t] \times B) = \{T \wedge t \in [s,t]\} \cap B = \underbrace{\{T \geq s\}}_{\in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t} \cap B \in \mathcal{F}_t$$

Da $\sigma([s,t] \times B : s \in [0,t], B \in \mathcal{F}_t) = \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$, ist folglich φ $(\mathcal{F}_t, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t)$-meßbar. Zudem ist wegen der Progressivität von X

$$[0,t] \times \Omega : (s,\omega) \mapsto X_s(\omega) \quad \text{ist} \quad (\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t, \mathcal{E})\text{-meßbar}$$

Also,

$$\Omega \ni \omega \mapsto X_{T(\omega) \wedge t}(\omega) = X \circ \varphi(\omega)$$

ist $(\mathcal{F}_t, \mathcal{E})$-meßbar, d.h. $\forall A \in \mathcal{E}$ gilt $\{X_{T \wedge t} \in A\} \in \mathcal{F}_t$ und $(*)$ folgt.

(ii) <u>Zu zeigen:</u> $[0,t]\times\Omega \ni (s,\omega) \longmapsto X_s^T(\omega)$ ist $(\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t)$-meßbar

Da T eine Stoppzeit ist, ist auch $T\wedge t$ eine (durch t beschränkte) Stoppzeit. Insbesondere ist nach (i) X_t^T $(\mathcal{F}_{T\wedge t})$-meßbar, d.h. X^T ist $(\mathcal{F}_{T\wedge t})$-adaptiert. Weiterhin betrachte die Abb.

$$\varphi : [0,t]\times\Omega \longrightarrow [0,t]\times\Omega\ , \quad (s,\omega)\longmapsto (T(\omega)\wedge s,\omega)$$

Dann gilt für alle $r\in[0,t]$ und $B\in\mathcal{F}_t$

$$\varphi^{-1}([0,r]\times B) = \{(s,\omega)\in[0,t]\times B : T(\omega)\wedge s\in[0,r]\}$$

$$= ([0,r]\times B)\cup([r,t]\times(\{T\le r\}\cap B)) \in \mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$$

Folglich ist die Abb φ $(\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t)$-meßbar. Zudem gilt

$$[0,t]\times\Omega \ni (s,\omega) \xmapsto{\ \varphi\ } (T(\omega)\wedge s,\omega) \xmapsto{\ X\ } X_{T(\omega)\wedge s}(\omega),$$

Somit ist $(s,\omega)\longmapsto X_s^T(\omega)$ $(\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t,\mathcal{E})$-meßbar. $\square$

Definition (Eintritts- und Treffzeit)

Sei X ein Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit Werten in $(E, \mathcal{E})$ und $A \subseteq E$.

Dann heißen die Abb. $S_A, T_A : \Omega \to [0, \infty]$

$$S_A(\omega) := \inf \{ t > 0 : X_t(\omega) \in A \}$$

$$(\inf \emptyset = \infty)$$

$$T_A(\omega) := \inf \{ t \geq 0 : X_t(\omega) \in A \}$$

(erste) Rückkehr- bzw. Treffzeit und erste Eintrittszeit.

Bem: Jede Stoppzeit T ist eine Eintrittszeit, denn für

$$X_t(\omega) := \mathbb{1}_{[0, T(\omega)]}(t) \,, \quad \forall\, \omega \in \Omega,\ t \geq 0$$

gilt, daß $T_{\{0\}} = T$.

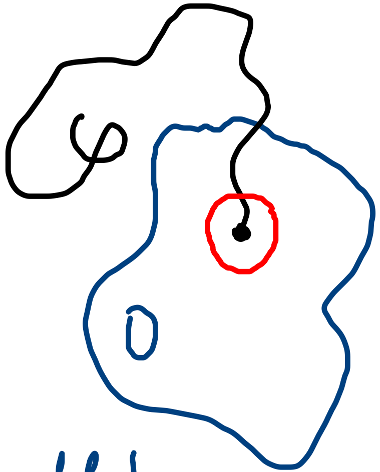
<u>Satz 1.8</u>: Sei X ein adaptierter, stochastischer Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ mit Werten in einem metrischen Raum (E,d). Bezeichne mit $\mathcal{B}(E)$ die zugehörige Borel-σ-Algebra.

(i) Falls $O \subseteq E$ offen und X rechtsstetig (oder linksstetig) ist, so sind S_O und T_O $(\mathcal{F}_t)$-optionale Zeiten.

(ii) Falls $A \subseteq E$ abgeschlossen und X stetig ist, so ist T_A eine $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeit, während S_A eine $(\mathcal{F}_t)$-optionale Zeit ist.

<u>Bem</u>: Falls X rechtsstetig und E höchstens abzählbar ist, so ist T_D eine $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeit für alle $D \subseteq E$.

<u>Beweis</u>: (i) Sei $O \subseteq E$ offen und X rechts- bzw. linksstetig. Dann gilt für alle $t > 0$



$$T_O < t \iff \exists\, s \in [0,t) : X_s \in O$$
$$\iff \exists\, q \in [0,t) \cap \mathbb{Q} : X_q \in O$$

Da zudem X adaptiert ist nach Voraussetzung, folgt

$$\{T_O < t\} = \bigcup_{q \in [0,t) \cap \mathbb{Q}} \underbrace{\{X_q \in O\}}_{\in \mathcal{F}_q \subseteq \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t$$

Zusammen mit Lemma 1.1 ergibt sich folglich, daß T_O eine optionale Zeit ist. Mit dem gleichen Argument folgt, daß auch S_O eine optionale Zeit ist

(ii) Zunächst einmal ist die Abb. $x \longmapsto d(x,A) := \inf_{y \in A} d(x,y)$ für jedes $A \subseteq E$ stetig. Also ist auch $s \longmapsto d(X_s, A)$ als Komposition stetiger Abbildungen stetig für jedes $\omega \in \Omega$. Zudem ist $d(X_s, A)$ $\mathcal{F}_s$-meßbar. Sei nun $A \subseteq E$ abgeschlossen. Dann gilt für jedes $t \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\{T_A > t\} &= \{X_s \notin A \quad \forall s \in [0,t]\} \\
&= \{d(X_s, A) > 0 \quad \forall s \in [0,t]\} \\
&= \{\exists n \in \mathbb{N} : d(X_s, A) \geq \tfrac{1}{n} \quad \forall s \in [0,t] \cap \mathbb{Q}\} \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{s \in [0,t] \cap \mathbb{Q}} \underbrace{\{d(X_s, A) \geq \tfrac{1}{n}\}}_{\in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t
\end{aligned}
$$

Folglich ist T_A eine Stoppzeit.

Für $\bar{S}_A$ ändert sich das Argument im wesentlich nur im Zeitpunkt 0. Sei also $t>0$. Dann gilt

$$\{\bar{S}_A > t\} = \{X_s \notin A \quad \forall s \in (0,t]\}$$

$$= \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{X_s \notin A \quad \forall s \in [\tfrac{1}{m},t]\}$$

$$= \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{s\in[\frac{1}{m},t]\cap\mathbb{Q}} \{d(X_s,A) \geq \tfrac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t$$

Daraus folgt

$$\{\bar{S}_A \leq 0\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \{\bar{S}_A < \tfrac{1}{m}\} \subseteq \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \{\bar{S}_A \leq \tfrac{1}{m}\} \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_{1/m} = \mathcal{F}_0^+$$

Also ist $\bar{S}_A$ eine optionale Zeit. $\square$