VL Markovsche Prozesse

1. Stochastische Prozesse, Filtrationen und Stoppzeiten

Setting: • $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum

• $(E, \mathcal{E})$ ein meßbarer Raum

1.1 Filtrationen und Stoppzeiten

<u>Definition</u> (Filtration)

Eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ist eine nicht-fallende Familie von Sub-σ-Algebren, d.h.

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_\infty := \sigma\Big(\bigcup_{r \geq 0} \mathcal{F}_r \Big) \subseteq \mathcal{F} \quad , \quad \forall\ 0 \leq s \leq t < \infty$$

Wir nennen $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ einen filtrierten, meßbaren Raum.

Zu einer gegebenen Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ definiere

$$\mathcal{F}_t^+ := \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon} \quad , \quad t \in [0,\infty)$$

<u>Bem:</u> 1. $(\mathcal{F}_t^+)_{t\geq 0}$ ist ebenfalls eine Filtration

2. $\mathcal{F}_t^{++} = \mathcal{F}_t^+ \quad , \quad t \geq 0$

3. Aber $\mathcal{F}_t^+$ ist i.A. verschieden von $\mathcal{F}_t$

<u>Bsp 1:</u> $(\Omega, \mathcal{F}) := (\{1,2\}, 2^{\{1,2\}})$ und definiere

$$\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\} \quad , \quad \mathcal{F}_t := 2^{\{1,2\}} \quad \forall\, t>0$$

Dann gilt:

$$\mathcal{F}_0^+ = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_\varepsilon = 2^{\{1,2\}} \neq \{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_0$$

Definition (rechtsstetige Filtration)

Eine Filtration heißt rechtsstetig, falls $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^+$ für alle $t \geq 0$.

Frage: Wie würden Sie eine linksstetige Filtration definieren?

Definition (übliche Bedingungen)

Eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ genügt den üblichen Bedingungen, falls $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ rechtsstetig ist und $\mathcal{F}_0$ jede $\mathbb{P}$-Nullmenge enthält.

Bem: Jeder filtrierte Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ kann durch Augmentierung derart erweitert werden, dass er den üblichen Bedingungen genügt: Sei $\mathcal{N}$ die Menge aller $\mathbb{P}$-Nullmengen und setze $\mathcal{F}_t' := \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{N})$ für alle $t \geq 0$.

Definition (optionale Zeit, Stoppzeit)

Eine $\mathcal{F}$-meßbare Abb. $T: \Omega \to [0,\infty]$ (zufällige Zeit) heißt

(i) $(\mathcal{F}_t)$-optionale Zeit, falls $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t^+$ für alle $t \geq 0$.

(ii) $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeit, falls $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$.

Bem: 1. Da $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_t^+$ $(t \geq 0)$, ist jede Stoppzeit eine optionale Zeit.

2. Falls $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ rechtsstetig ist, so ist jede optionale Zeit eine Stoppzeit.

3. $\{T = \infty\} = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{T \leq n\} \right)^c \in \mathcal{F}_\infty$

4. Ist T eine optionale Zeit, so ist $T+\varepsilon$ eine Stoppzeit für jedes $\varepsilon > 0$.

Warum?

5. Eine optionale Zeit ist i.A. keine Stoppzeit.

Bsp 2: $(\Omega, \mathcal{F}) := (\{1,2\}, 2^{\{1,2\}})$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_t = 2^{\{1,2\}}$ $\forall t > 0$.

Betrachte die Abb. $T: \Omega \to [0,\infty]$ $\omega \longmapsto \infty \cdot \mathbb{1}_{\{2\}}(\omega)$.

Dann gilt: $\{T \le t\} = \{1\} \in \mathcal{F}_t^+$ $\forall t \geq 0$. Aber $\{T \le 0\} \notin \mathcal{F}_0$.

Lemma 1.1. Eine zufällige Zeit ist genau dann eine optionale Zeit, wenn $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$.

Beweis: "$\Rightarrow$" Offensichtlich ist $\{T < 0\} = \emptyset \in \mathcal{F}_0$. Weiterhin gilt

$$\{T < t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{T \le t - 1/n\}}_{\mathcal{F}^+_{t-1/n} \subseteq \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t \qquad \forall t > 0$$

"$\Leftarrow$" Für $t \geq 0$ gilt:

$$\{T \le t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{T < t + 1/n\} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{t+1/n} = \mathcal{F}_t^+$$

$\square$

Bem: Aus Lemma 1.1 folgt für jede Stoppzeit, dass

$$\{T=t\} = \{T\le t\} \setminus \{T<t\} \in \mathcal{F}_t \qquad \forall t\ge 0$$

Allerdings genügt i.A. die Kenntnis von $\{T=t\}\in\mathcal{F}_t$ nicht zur Charakterisierung einer Stoppzeit aus.

Bsp 3: $(\Omega,\mathcal{F}) := ([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$, $\mathcal{F}_t = \sigma(\{\omega\} : \omega\le t)$ $\forall t\ge 0$

Definiere $T:\Omega\to[0,\infty]$, $\omega\mapsto T(\omega):=\omega$. Dann gilt:

$$\{T=t\} = \begin{cases} \{t\}, & t\in[0,1] \\ \emptyset, & t\in(1,\infty] \end{cases} \in \mathcal{F}_t$$

Aber T ist keine optionale Zeit, da $\{T<t\} = [0,t) \notin \mathcal{F}_t$ für alle $t\in(0,1)$.

Lemma 1.2. (i) Sind S, T zwei $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeiten, so sind auch

$S \wedge T := \min\{S, T\}$ und $S \vee T := \max\{S, T\}$ $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeiten.

(ii) Ist (T_n) eine Folge von $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeiten, so ist auch $\sup_{n \geq 1} T_n$ eine $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeit. Falls zudem die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ rechtsstetig ist, so ist auch $\inf_{n \geq 1} T_n$ eine $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeit.

Beweis: Übung

Definition (T-Vergangenheit)

Sei T eine zufällige Zeit. Dann bezeichnet

$$\mathcal{F}_T := \{ A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0 \}$$

$$\mathcal{F}_T^+ := \{ A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t^+ \text{ für alle } t \geq 0 \}$$

die Menge der Ereignisse der T-Vergangenheit.

Bem: 1. Ist T eine Stoppzeit, so ist $\mathcal{F}_T$ eine σ-Algebra und T ist $\mathcal{F}_T$-meßbar, denn

- $\Omega \in \mathcal{F}_T$ (da T eine Stoppzeit ist)
- Sei $A \in \mathcal{F}_T$. Da für alle $t \geq 0$

$$A^c \cap \{T \leq t\} = \underbrace{\{T \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \cap \big(\underbrace{A \cap \{T \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t}\big)^c \in \mathcal{F}_t \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}_T.$$

- Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_T$. Da für alle $t \geq 0$

$$\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) \cap \{T \leq t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \big(\underbrace{A_n \cap \{T \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t}\big) \in \mathcal{F}_t \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}_T$$

2. Ist $T(\omega) = t_0 \in [0, \infty]$ für alle $\omega \in \Omega$, so ist $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{t_0}$ und $\mathcal{F}_T^+ = \mathcal{F}_{t_0}^+$.

Warum?

Lemma 1.3: Seien S und T zwei $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeiten. Dann gilt

(i) Falls $S \leq T$, so ist $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$

(ii) Falls $A \in \mathcal{F}_S$, dann ist $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$

(iii) $\mathcal{F}_{S \wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$

Beweis: Übung

Bem: Sei S eine optionale Zeit und T eine positive Stoppzeit mit der Eigenschaft, daß $S \leq T$ und $S < T$ auf $\{S < \infty\}$. Dann gilt $\mathcal{F}_S^+ \subseteq \mathcal{F}_T$. Denn für $A \in \mathcal{F}_S^+$ und $t \geq 0$ gilt:

$$A \cap \{T \leq t\}$$

$$= \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (0,t)} (\underbrace{A \cap \{S \leq r\}}_{\in \mathcal{F}_r^+ \subseteq \mathcal{F}_t} \cap \underbrace{\{r < T \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t}) \cup (\underbrace{A \cap \{S = \infty\}}_{\in \mathcal{F}_\infty} \cap \underbrace{\{T \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t}) \in \mathcal{F}_t$$

1.2. Stochastische Prozesse

Definition (Prozeß, stochastischer Prozeß)

Ein Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit Werten im Zustandsraum $(E, \mathcal{E})$ ist eine Familie $X = (X_t)_{t \geq 0}$ von E-wertigen ZV. Für $\omega \in \Omega$ heißt die Abb. $[0,\infty) \ni t \mapsto X_t(\omega)$ eine Trajektorie (Pfad). Ist ein W-Maß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ gegeben, so nennt man X einen stochastischen Prozeß.

Definition (stetige Prozesse)

Sei X ein Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit Werten in einem metrischen Raum E. X heißt (links-, rechts-) stetig, falls alle Pfade (links-, rechts-) stetig sind.

<u>Definition</u> (càdlàg Prozesse)

Sei X ein Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit Werten in einem metrischen Raum E.

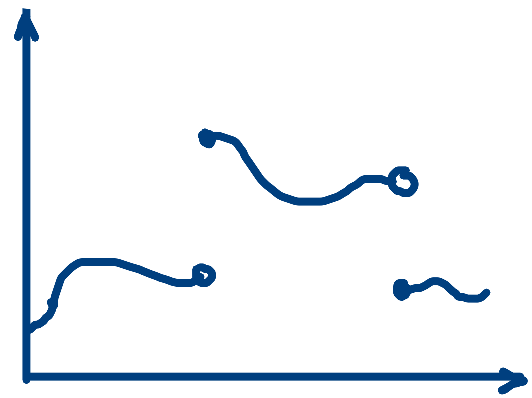
X heißt càdlàg oder RCLL, falls für jedes $\omega \in \Omega$,

$$X_t(\omega) = X_{t+}(\omega) := \lim_{s \downarrow t} X_s(\omega) \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

und falls der linksseitige Grenzwert

$$X_{t-}(\omega) := \lim_{s \uparrow t} X_s(\omega) \quad \text{für jedes } t > 0$$

existiert und endlich ist.



<u>Bsp 4</u>: $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $X_t(\omega) := \mathbb{1}_{t<1} (t-1)^{-1}$ für alle $t \geq 0$ und $\omega \in \Omega$. Dann ist der Prozeß $(X_t)_{t \geq 0}$ nicht càdlàg.

Bem: $\mathcal{E}^{\otimes[0,\infty)}$ bezeichne die Produkt-σ-Algebra auf $E^{[0,\infty)}$, d.h. die kleinste σ-Algebra, so daß für jedes $t \in [0,\infty)$ die Projektion $\pi_t : E^{[0,\infty)} \to E$, $x \mapsto \pi_t(x) = x_t$ meßbar ist. Einen $\cap$-stabilen Erzeuger von $\mathcal{E}^{\otimes[0,\infty)}$ stellt die Menge der Zylindermengen $\mathcal{Z}$ dar

$$\mathcal{Z} = \left\{ \{ x \in E^{[0,\infty)} : x_{t_1} \in A_1, \dots, x_{t_n} \in A_n \} : n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in [0,\infty); A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E} \right\}$$

Proposition 1.4: Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ eine Familie von Abb. von Ω nach E und definiere die Abb. $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E^{[0,\infty)}, \mathcal{E}^{\otimes[0,\infty)})$ durch $X(\omega) := (X_t(\omega))_{t \geq 0}$. Dann gilt:

$$(X_t)_{t \geq 0} \text{ ist ein Prozeß} \iff X \text{ ist } (\mathcal{F}, \mathcal{E}^{\otimes[0,\infty)})\text{-meßbar}$$

Beweis: Übung

Definition (Verteilung)

Sei X ein E-wertiger stochastischer Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann heißt $\mathbb{P}_X := \mathbb{P} \circ X^{-1}$ die Verteilung (law) von X.

Betrachte nun zwei Prozesse X und Y auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Wir wollen gerne sagen, daß X und Y gleich sind, falls $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ für alle $t \geq 0$ und $\omega \in \Omega$.

Allerdings muß i.A. das Ereignis $\{X_t = Y_t\}$ nicht meßbar sein.

Bsp 5: $(\Omega, \mathcal{F}) = (E, \mathcal{E}) = (\{1,2\}, \{\emptyset, \Omega\})$. Definiere

$$X_t(1) = 1, \quad X_t(2) = 2 \quad \text{und} \quad Y_t(1) = Y_t(2) = 1 \qquad \forall t \geq 0.$$

Dann gilt $\{\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)\} = \{1\} \notin \mathcal{F}$

Definition (Modifikation, ununterscheidbar)

Seien X und Y zwei stochastische Prozesse auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in $(E, \mathcal{E})$.

(i) X und Y haben die gleiche endlich dimensionale Verteilung, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 < \ldots < t_n < \infty$ und $A \in \mathcal{E}^{\otimes n}$

$$\mathbb{P}[(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in A] = \mathbb{P}[(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n}) \in A].$$

(ii) X und Y heißen Modifikationen voneinander, falls für jedes $t \geq 0$ ein $N \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}[N] = 0$ existiert, so daß $\{X_t \neq Y_t\} \subseteq N$.

(iii) X und Y heißen ununterscheidbar, falls ein $N \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}[N] = 0$ existiert, so daß $\{X_t \neq Y_t\} \subseteq N$ für alle $t \geq 0$.

Bem: 1. Seien X und Y zwei stochastische Prozesse, so gilt

ununterscheidbar $\Rightarrow$ Modifikation

$\Rightarrow$ gleiche endlich dim. Verteilung

2. Falls $(X_t : t \in I)$ und $(Y_t : t \in I)$ Modifikationen sind und die Indexmenge $I \subseteq [0, \infty)$ abzählbar ist, so sind $(X_t : t \in I)$ und $(Y_t : t \in I)$ ununterscheidbar.

Bsp 6: $(\Omega, \mathcal{F}) = (\{1,2\}, 2^{\{1,2\}})$, $\mathbb{P}[\{1\}] = \mathbb{P}[\{2\}] = \frac{1}{2}$. Definiere

$X_t(1) = 1$, $X_t(2) = 2$ und $Y_t(1) = 2$, $Y_t(2) = 1$ $\quad \forall\, t \geq 0$

Dann gilt $\{X_t \neq Y_t\} = \Omega$, aber

$$\mathbb{P}[X_{t_1} = a_1, \dots, X_{t_n} = a_n] = \mathbb{P}[Y_{t_1} = a_1, \dots, Y_{t_n} = a_n] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & a_1 = \dots = a_n \in \{1,2\} \\ 0 & \end{cases}$$

Bsp 7: Sei T eine positive ZV auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit stetiger Verteilung.

Definiere für alle $t \geq 0$ und $\omega \in \Omega$

$$X_t(\omega) = 0 \qquad \text{und} \qquad Y_t(\omega) = \mathbb{1}_{T(\omega)=t} .$$

Da für jedes $t \geq 0$ gilt, daß

$$\mathbb{P}[X_t = Y_t] = \mathbb{P}[T \neq t] = 1$$

sind folglich X und Y Modifikationen voneinander. Aber

$$\mathbb{P}[X_t = Y_t \text{ für alle } t \geq 0] = 0 .$$

Lemma 1.5: Seien X und Y zwei stochastische Prozesse auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in einem metrischen Raum (E, d). Falls X und Y Modifikationen voneinander sind und $\mathbb{P}$-f.s. rechtsstetige Trajektorien besitzen, so sind X und Y ununterscheidbar.

Beweis: Seien $N_X \in \mathcal{F}$ und $N_Y \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}[N_X] = \mathbb{P}[N_Y] = 0$ die Mengen auf denen die stochastischen Prozesse nicht rechtsstetig sind.

Da X und Y Modifikationen voneinander sind, gibt es zu jedem $r \in \mathbb{Q} \cap [0,\infty)$ ein $N_r \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}[N_r] = 0$ und $\{X_r \neq Y_r\} \subseteq N_r$.

Insbesondere

$$N := N_X \cup N_Y \cup \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,\infty)} N_r \in \mathcal{F} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[N] = 0.$$

Zudem gilt für alle $t \geq 0$

$$\{X_t \neq Y_t\} \cap (N_X \cup N_Y)^c \subseteq \bigcup_{\mathbb{Q} \ni r \geq t} \left(N_r \cap (N_X \cup N_Y)^c\right)$$

Also,

$$\{X_t \neq Y_t\} \subseteq (N_X \cup N_Y) \cup \left(\{X_t \neq Y_t\} \cap (N_X \cup N_Y)^c\right) \subseteq N,$$

d.h. X und Y sind ununterscheidbar. $\square$