4. Konvergenz von Markovketten

4.1 Konvergenz der Übergangswahrscheinlichkeiten

Frage: Unter welchen Bedingungen konvergieren die Übergangswahrscheinlichkeiten?

Beispiel 33: Betrachte die stochastische Matrix $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ auf $E = \{1,2\}$. Dann gilt

$$P^k = P \quad \forall\, k \in \{2\ell+1 : \ell \in \mathbb{N}_0\} \qquad \text{und} \qquad P^k = I \quad \forall\, k \in \{2\ell : \ell \in \mathbb{N}_0\}$$

Definition (Kopplung von Markovketten)

Eine bivariate Markovkette $((X_n, Y_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Werten im Zustandsraum $E \times E$ heißt eine (markovsche) Kopplung der (μ, P)-Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und der (ν, P)-Markovkette $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf E, falls für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{P}\left[X_{n+1} = x' \mid (X_n, Y_n) = (x,y) \right] &= p(x,x') \\ \mathbb{P}\left[Y_{n+1} = y' \mid (X_n, Y_n) = (x,y) \right] &= p(y,y') \end{aligned}\right. \qquad \forall\, (x,y), (x',y') \in E \times E$$

Beispiel 34: (unabhängige Kopplung) Sei $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ eine stochastische Matrix und μ, ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf E. Dann ist die Markovkette $((X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Werten in $E \times E$, Startverteilung $\mu \otimes \nu$ und Übergangsmatrix $\bar{P}$ mit

$$\bar{p}((x,y),(x',y')) := p(x,x')\, p(y,y')$$

eine Kopplung einer (μ, P)-Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und einer (ν, P)-Markovkette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum E, denn

$$\mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}[X_0 = x] = \mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}[(X_0, Y_0) \in \{x\}\times E] = \sum_{y\in E} \mu(x)\nu(y) = \mu(x)$$

und

$$\mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}[X_{n+1} = x' \mid (X_n, Y_n) = (x,y)]$$

$$= \mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}[(X_{n+1}, Y_{n+1}) \in \{x'\}\times E \mid (X_n, Y_n) = (x,y)]$$

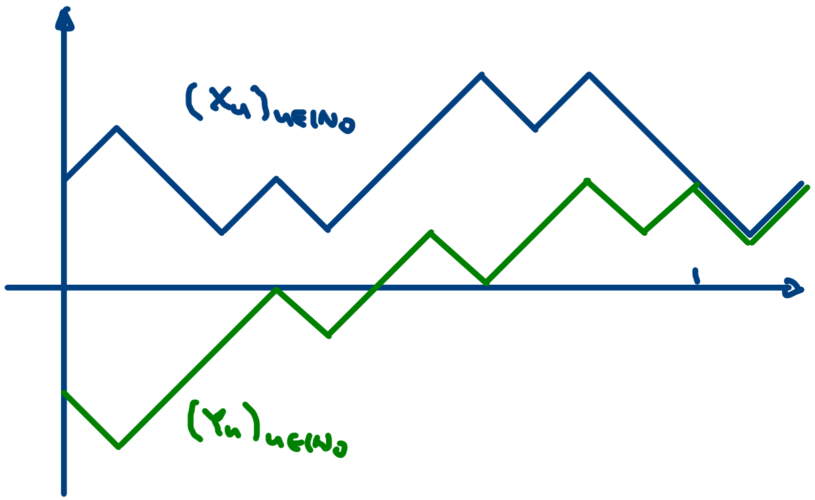
$$= \sum_{y'\in E} \bar{p}((x,y),(x',y')) = \sum_{y'\in E} p(x,x')\, p(y,y') = p(x,x')$$

(Analog prüft man die Bedingung für $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach.)

Beispiel 35: (unabhängiges Verschmelzen) Sei $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ eine stochastische Matrix und μ, ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf E. Definiere die Übergangsmatrix $\bar{P}$ durch

$$\bar{p}((x,y),(x',y')) = \begin{cases} p(x,x')\,p(y,y') & , \; x \neq y \\ p(x,x') & , \; x = y \text{ und } x' = y' \\ 0 & , \; x = y \text{ und } x' \neq y' \end{cases}$$

für alle $(x,y),(x',y') \in E \times E$. Dann ist die $(\mu\otimes\nu, \bar{P})$-Markovkette $((X_n,Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $E\times E$ eine Kopplung einer (μ,P)- und einer (ν,P)-Markovkette auf E.



Aufgabe 22: Betrachte zwei unabhängige Markovketten $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum E, der selben Übergangsmatrix P und Startverteilungen μ bzw. ν. Weiterhin sei

$$T := \inf\{n\in\mathbb{N}_0 : X_n = Y_n\}$$

die Stoppzeit der ersten Begegnung der beiden Markovketten. Zeige, daß

a) der stochastische Prozeß $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$Z_n = \begin{cases} Y_n, & n \leq T \\ X_n, & n \geq T \end{cases}$$

eine (ν, P) - Markovkette ist.

b) der stochastische Prozeß $((X_n, Z_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Markovkette des unabhängigen Verschmelzens ist.

Bemerkung 23: Selbst wenn die stochastische Matrix $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ irreduzibel ist, garantiert dies i.A. nicht die Irreduzibilität der stochastischen Matrix $\overline{P}$ mit

$$\bar{p}((x,y),(x',y')) := p(x,x')\,p(y,y') \quad , \quad (x,y),(x',y')\in E\times E.$$

<u>Beispiel 36</u>: Sei $E = \{1,2\}$ und $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Dann ist P irreduzibel. Betrachte nun die stochastische Matrix $\bar{P}$ mit

$$\bar{p}((x,y),(x',y')) = p(x,x')p(y,y') \qquad \forall\ (x,y),(x',y') \in E \times E$$

Dann gilt

$$\bar{p}_n((1,1),(1,2)) = \underbrace{p_n(1,1)}_{=0\ \forall\, n\ \text{ungerade}} \overbrace{p_n(1,2)}^{=0\ \forall\, n\ \text{gerade}} = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

Folglich ist die stochastische Matrix $\bar{P}$ nicht irreduzibel.

<u>Satz 4.1</u> Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible, aperiodische, rekurrente Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$. Dann gilt für alle $x,y \in E$

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x,y) = \begin{cases} 1/\mathbb{E}_y[S_{\{y\}}] & , \ \mathbb{E}_y[S_{\{y\}}] < \infty \\ 0 & , \ \mathbb{E}_y[S_{\{y\}}] = \infty \end{cases}.$$

<u>Bemerkung 24</u>: Im positiv rekurrenten Fall konvergiert somit $p_n(x,y)$ gegen die (eindeutig bestimmte) Gleichgewichtsverteilung $\pi(y) = 1/\mathbb{E}_y[S_{\{y\}}]$.

<u>Beweis:</u> <u>Schritt 1:</u> Sei $((X_n,Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Markovkette der unabhängigen Kopplung (vgl. Beispiel 34). Da P irreduzibel und aperiodisch ist, gibt es nach Satz 2.10 und Korollar 2.6. für alle $x,x',y,y'\in E$ ein $N_0 \equiv N_0(x,x',y,y')\in\mathbb{N}$ so, daß

$$\bar{p}_n((x,y),(x',y')) = p_n(x,x')\,p_n(y,y') > 0 \qquad \forall\ n\geq N_0.$$

Folglich ist die Markovkette $((X_n,Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel. Für ein beliebig gewähltes $x_0\in E$ definiere

$$S \equiv S_{\{(x_0,x_0)\}} := \inf\{n\in\mathbb{N} : (X_n,Y_n) = (x_0,x_0)\}.$$

<u>Zu zeigen:</u> $\quad |p_n(x,y) - p_n(z,y)| \leq \mathbb{P}_{(x,z)}[S>n] \qquad \forall\ n\in\mathbb{N}$

Es gilt nun aber

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(x,z)}[X_n=y,\ S\leq n] &= \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_{(x,z)}[X_n=y,\ S=m] \\
&= \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_{(x,z)}[S=m]\ \mathbb{P}_{(x,z)}[X_n=y \mid (X_S,Y_S)=(x_0,x_0),\ S=m] \\
&\overset{\text{Satz 1.10}}{=} \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_{(x,z)}[S=m]\ \mathbb{P}_{(x_0,x_0)}[X_{n-m}=y]
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\mathbb{P}_{(x_0,x_0)}[X_{n-m}=y] = \sum_{y'\in E} \underbrace{\bar{p}_{n-m}((x_0,x_0),(y,y'))}_{= p_{n-m}(x_0,y)\, p_{n-m}(x_0,y')}$$

$$= \sum_{y'\in E} \overbrace{\bar{p}_{n-m}((x_0,x_0),(y',y))} = \mathbb{P}_{(x_0,x_0)}[Y_{n-m}=y]$$

Daraus folgt

$$\mathbb{P}_{(x,z)}[X_n=y, S\le n] = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_{(x,z)}[S=m]\,\mathbb{P}_{(x_0,x_0)}[X_{n-m}=y]$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_{(x,z)}[S=m]\,\mathbb{P}_{(x_0,x_0)}[Y_{n-m}=y] = \mathbb{P}_{(x,z)}[Y_n=y, S\le n]$$

Somit ergibt sich

$$|p_n(x,y)-p_n(z,y)| = |\mathbb{P}_{(x,z)}[X_n=y]-\mathbb{P}_{(x,z)}[Y_n=y]|$$

$$= |\mathbb{P}_{(x,z)}[X_n=y, S>n]-\mathbb{P}_{(x,z)}[Y_n=y, S>n]|$$

$$= |\mathbb{P}_{(x,z)}[X_n=y\mid S>n]-\mathbb{P}_{(x,z)}[Y_n=y\mid S>n]|\;\mathbb{P}_{(x,z)}[S>n]$$

$$\le \mathbb{P}_{(x,z)}[S>n]$$

Schritt 2: Betrachte zunächst den Fall, daß $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ positiv rekurrent ist. Dann existiert nach Satz 3.6 a) eine eindeutig bestimmte Gleichgewichtsverteilung π. Da aber

$$\sum_{(x,y)\in E\times E} (\pi\otimes\pi)(x,y)\,\tilde{p}((x,y),(x',y')) = (\pi P)(x')\,(\pi P)(y') \overset{\pi=\pi P}{=} \pi(x')\,\pi(y') = (\pi\otimes\pi)(x',y')$$

ist folglich $\pi\otimes\pi$ eine Gleichgewichtsverteilung von $((X_n,Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$. Insbesondere ist nach Satz 3.6 a) die Markovkette $((X_n,Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ positiv rekurrent und damit auch rekurrent. Aus Satz 2.12 folgt daher

$$\mathbb{P}_{(x,z)}[S_{\{(x_0,x_0)\}}<\infty]=1$$

Daraus folgt

$$\limsup_{n\to\infty} |p_n(x,y)-p_n(z,y)| \leq \mathbb{P}_{(x,z)}[S_{\{(x_0,x_0)\}}=\infty]=0$$

Also,

$$\lim_{n\to\infty} |p_n(x,y)-p_n(z,y)| = 0.$$

Weiterhin gilt

$$|p_n(x,y)-\pi(y)| = \Big|\sum_{z\in E}\pi(z)\,(p_n(x,y)-p_n(z,y))\Big| \leq \sum_{z\in E}\pi(z)\,|p_n(x,y)-p_n(z,y)|$$

Also folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$\limsup_{n\to\infty} |p_n(x,y) - \pi(y)| \leq 0$$

Da $\pi(y) = 1/\mathbb{E}_y[S_{\{y\}}]$ nach Satz 3.6a) ist, folgt die Behauptung.

Schritt 3: Sei nun $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nullrekurrent. Dann gibt es zwei Fälle zu untersuchen

1. Fall : $((X_n,Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist transient

Nach Korollar 2.2 gilt dann aber

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x,y)^2 = \lim_{n\to\infty} \bar{p}_n((x,x),(y,y)) = 0,$$

woraus die Behauptung folgt.

2. Fall : $((X_n,Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist rekurrent

Dann ist nach Satz 2.12 $\mathbb{P}_{(x,z)}[S_{\{(x_0,x_0)\}} < \infty] = 1$ und aus Schritt 1 folgt

$$\limsup_{n\to\infty} |p_n(x,y) - p_n(z,y)| \leq \mathbb{P}_{(x,z)}[S_{\{(x_0,x_0)\}} = \infty] = 0$$

Also,

$$\lim_{n\to\infty} |p_n(x,y) - p_n(z,y)| = 0$$

Angenommen es existiert ein $(x,y) \in E \times E$ mit

$$\limsup_{n\to\infty} p_n(x,y) =: \alpha > 0$$

Dann existiert eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ derart, daß

$$\lim_{k\to\infty} p_{n_k}(x,y) = \alpha$$

Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nullrekurrent ist, folgt aus Satz 3.4, daß

$$\mu_x(z) := \mathbb{E}_x\Big[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbb{1}_{X_n=z}\Big] \qquad , z\in E$$

ein invariantes Maß ist mit $\mu_x(z) \in (0,\infty)$ für alle $z\in E$ und

$$\sum_{z\in E} \mu_x(z) = \mathbb{E}_x\big[S_{\{x\}}\big] = \infty$$

Also existiert eine endliche Teilmenge $M \subseteq E$ mit

$$\sum_{z\in M} \mu_x(z) > \frac{2}{\alpha}\, \mu_x(y).$$

Weiterhin existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so, daß für alle $k \geq k_0$

$$\left| p_{n_k}(x,y) - \alpha \right| < \frac{\alpha}{4} \qquad \text{und} \qquad \max_{z\in M} \left| p_{n_k}(x,y) - p_{n_k}(z,y) \right| < \frac{\alpha}{4}.$$

Daraus folgt dann aber für alle $z \in M$ und $k \geq k_0$

$$p_{n_k}(z,y) = \alpha + p_{n_k}(z,y) - \alpha \geq \alpha - \underbrace{|p_{n_k}(z,y) - p_{n_k}(x,y)|}_{< \frac{\alpha}{4}} - \underbrace{|p_{n_k}(x,y) - \alpha|}_{< \frac{\alpha}{4}} > \frac{\alpha}{2}$$

Also,

$$\mu_x(y) \overset{\mu_x = \mu_x P}{=} \sum_{z \in E} \mu_x(z)\, p_{n_k}(z,y) \geq \sum_{z \in M} \mu_x(z)\, p_{n_k}(z,y) > \frac{\alpha}{2} \sum_{z \in M} \mu_x(z) > \mu_x(y) \quad ↯$$

Folglich war die Annahme falsch und es gilt

$$\lim_{n \to \infty} p_n(x,y) = 0 \qquad \square$$

<u>Aufgabe 23</u>: Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine irreduzible, periodische Markovkette mit Zustandsraum E, Übergangsmatrix P mit Periode $d > 1$. Bezeichne mit $S_{\{x\}}$ die Trefferzeit des Zustandes $x \in E$. Betrachte den stochastischen Prozeß $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $Y_n := X_{dn}$ und setze

$$S^d_{\{x\}} = \inf\{n \in \mathbb{N} : Y_n = x\}, \quad x \in E$$

Nach Aufgabe 8 ist $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Zeige:

a) $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist aperiodisch

b) $S^d_{\{x\}} = \frac{1}{d} S_{\{x\}}$ P_x-fast sicher und $\mathbb{E}_x[S^d_{\{x\}}] = \frac{1}{d} \mathbb{E}_x[S_{\{x\}}]$

Korollar 4.2 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible, periodische, positiv rekurrente Markovkette mit Zustandsraum E, Übergangsmatrix P und Periode $d>1$. Bezeichne mit π die zugehörige Gleichgewichtsverteilung. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} p_{dn}(x,x) = d\,\pi(x) \qquad \forall x\in E.$$

Beweis: Betrachte die Markovkette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Übergangsmatrix $Q := P^d$. Dann ist $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel und es gilt

$$(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \overset{\mathcal{D}}{=} (X_{dn})_{n\in\mathbb{N}_0}$$

Also ist nach Aufgabe 23 $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aperiodisch und (wegen $\mathbb{E}_x[S^d_{\{x\}}] = \frac{1}{d}\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}] < \infty$) positiv rekurrent. Aus Satz 4.1 folgt somit

$$\lim_{n\to\infty} p_{dn}(x,x) = \lim_{n\to\infty} q_n(x,x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[S^d_{\{x\}}]} = \frac{d}{\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}]}$$

Schließlich folgt aus Satz 3.6, daß

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}]}$$

$\square$

Beweis von Satz 2.3: Für $x \in E$ sei $K(x)$ die kommunizierende Klasse, die x enthält. Da wegen Aufgabe 15 die auf $K(x)$ eingeschränkte Übergangsmatrix wieder stochastisch ist, kann o.B.d.A angenommen werden, daß $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel.

1. Fall: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aperiodisch, so folgt aus Satz 4.1 die Behauptung.

2. Fall: Sei nun $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ periodisch mit Periode $d>1$.

"$\Leftarrow$" Angenommen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wäre positiv rekurrent. Dann folgt aus Korollar 4.2 für $x\in E$

$$0 = \lim_{n\to\infty} p_{dn}(x,x) = \frac{d}{E_x[S_{\{x\}}]} > 0 \quad ↯$$

Also ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nullrekurrent.

"$\Rightarrow$" Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ periodisch ist, folgt $p_n(x,x) = 0$ für alle $n \notin d\mathbb{N}_0$. Betrachte wieder die Markovkette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Übergangsmatrix $Q = P^d$. Dann ist

$$(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \overset{\mathcal{D}}{=} (X_{dn})_{n\in\mathbb{N}_0}$$

Nach Aufgabe 23 ist $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel, aperiodisch und nullrekurrent, und aus Satz 4.1 folgt

$$\lim_{n\to\infty} p_{dn}(x,x) = \lim_{n\to\infty} q_n(x,x) = 0$$

$\square$

4.2 Ergodensätze

Satz 4.3 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible, rekurrente Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix P. Definiere $V_x(N) := \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{1}_{X_n = x}$, $x\in E$. Für ein $x\in E$ bezeichne mit μ_x das invariante Maß aus Satz 3.4. Dann gilt für jedes $f\in \ell^1(\mu_x)$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{V_x(N)} \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) = \mathbb{E}_{\mu_x}[f(X_0)] = \sum_{y\in E} f(y)\mu_x(y) \qquad \mathbb{P}_x\text{-f.s.}$$

Beweis: Bezeichne wieder mit $S^k_{\{x\}}$ die k-te Treffzeit des Zustandes $x\in E$, d.h.

$$S^0_{\{x\}} = 0 \qquad \text{und} \qquad S^k_{\{x\}} = \inf\{ n > S^{k-1}_{\{x\}} : X_n = x\} \qquad , k\in\mathbb{N}$$

Da x rekurrent ist, so folgt aus der starken Markoveigenschaft (vgl. Beweis von Lemma 2.15)

$$\mathbb{P}_x[S^k_{\{x\}} < \infty] = 1 \qquad \forall k\in\mathbb{N}_0$$

Für ein $f: E\to[0,\infty)$ und $x\in E$ definiere

$$I^f_x(k) := \sum_{n=S^{k-1}_{\{x\}}}^{S^k_{\{x\}}-1} f(X_n) \qquad , k\in\mathbb{N}$$

Dann ist $\mathbb{P}_x$-fast sicher $I^f_x(k) < \infty$ für alle $k\in\mathbb{N}$.

__Zu zeigen:__ $(I_x^f(k))_{k\in\mathbb{N}}$ ist iid unter $\mathbb{P}_x$

Für ein beliebiges $k\in\mathbb{N}$ und $t_1,\dots,t_k\in\mathbb{R}$ folgt aus der starken Markoveigenschaft

$$\mathbb{P}_x\left[I_x^f(1)\le t_1,\dots,I_x^f(k)\le t_k\right]$$

$$=\mathbb{P}_x\left[I_x^f(1)\le t_1,\dots,I_x^f(k-1)\le t_{k-1}\right]$$

$$\cdot\ \mathbb{P}_x\Big[I_x^f(k)\le t_k \,\Big|\, \underbrace{I_x^f(1)\le t_1,\dots,I_x^f(k-1)\le t_{k}}_{\in\,\mathcal{F}^x_{S^{k-1}_{\{x\}}}},\ X_{S^{k-1}_{\{x\}}}=x,\ S^{k-1}_{\{x\}}<\infty\Big]$$

$$\overset{\text{Satz 1.15}}{=}\mathbb{P}_x\left[I_x^f(1)\le t_1,\dots,I_x^f(k-1)\le t_{k-1}\right]\ \mathbb{P}_x\left[I_x^f(1)\le t_k\right]$$

$$=\ \dots$$

$$=\prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}_x\left[I_x^f(1)\le t_i\right]$$

Folglich ist $(I_x^f(k))_{k\in\mathbb{N}}$ iid unter $\mathbb{P}_x$.

__Schritt 1:__ Sei nun $f\in\mathcal{L}^1(\mu_x)$ mit $f\ge 0$. Dann gilt

$$\mathbb{E}_x\left[I_x^f(1)\right]=\mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1}f(X_n)\right]=\sum_{y\in E}f(y)\,\mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1}\mathbb{1}_{X_n=y}\right]=\sum_{y\in E}f(y)\,\mu_x(y)<\infty$$

Also folgt aus dem starken Gesetz der großen Zahlen*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} I_x^f(k) = E_x\left[I_x^f(1)\right] = E_{\mu_x}\left[f(X_0)\right] \qquad P_x\text{-f.s.}$$

Weiterhin gilt P_x-fast sicher

$$S_{\{x\}}^{V_x(N)-1} \le N-1 < S_{\{x\}}^{V_x(N)} \qquad \forall N\in\mathbb{N}$$

Darum folgt

$$\sum_{k=1}^{V_x(N)-1} I_x^f(k) = \sum_{n=0}^{S_{\{x\}}^{V_x(N)-1}-1} f(X_n) \le \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) \le \sum_{n=0}^{S_{\{x\}}^{V_x(N)}-1} f(X_n) = \sum_{k=1}^{V_x(N)} I_x^f(k)$$

Aus der Rekurrenz von x folgt zudem aus Satz 2.1, daß

$$\lim_{N\to\infty} V_x(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X_n=x} = \infty \qquad P_x\text{-f.s.}$$

Also,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{V_x(N)} \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) = E_{\mu_x}\left[f(X_0)\right]$$

<u>Schritt 2</u>: Für ein beliebiges $f\in \ell^1(\mu_x)$ betrachte $f = f_+ - f_-$ und wende Schritt 1 auf f_+, f_- an.

---

* vgl. Döring, Satz 4.6.8 oder Klenke, Satz 5.17

$\square$

Korollar 4.4 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible, rekurrente Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix P. Definiere $V_x(N) := \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{1}_{X_n = x}$, $x \in E$. Weiterhin bezeichne mit μ_x, $x \in E$ das invariante Maß aus Satz 3.4. Dann gilt für alle $x, y, z \in E$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{V_y(N)}{V_z(N)} = \frac{\mu_x(y)}{\mu_x(z)} \qquad \mathbb{P}_x\text{-f.s.}$$

Beweis: Dies folgt direkt aus Satz 4.3, da $\mathbb{1}_{\{y\}}, \mathbb{1}_{\{z\}} \in \ell^1(\mu_x)$. $\square$

Satz 4.5 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible, positiv rekurrente Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix P. Weiterhin sei $\pi \in \mathrm{Inv}(P)$ die zugehörige Gleichgewichtsverteilung. Dann gilt für alle $x \in E$ und $f \in \ell^1(\pi)$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) = \mathbb{E}_\pi[f(X_0)] \qquad \mathbb{P}_x\text{-f.s. und in } L^1(\mathbb{P}_\pi).$$

Beweis: Zu zeigen: $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) = \mathbb{E}_\pi[f(X_0)] \quad \mathbb{P}_x\text{-f.s.}$

Da $x \in E$ positiv rekurrent ist, ist die Funktion $E \ni y \mapsto 1 \in \mathbb{R}$ in $\ell^1(\mu_x)$, denn

$$\sum_{y\in E} \mu_x(y) = \sum_{y\in E} \mathbb{E}_x\Big[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbb{1}_{X_n=y}\Big] = \mathbb{E}_x\big[S_{\{x\}}\big] < \infty .$$

Also folgt aus Satz 4.3

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N}{V_x(N)} = \mathbb{E}_{\mu_x}[1] = \mathbb{E}_x[S_{\{x\}}] \in (0,\infty)$$

Desweiteren ist μ_x proportional zu π, nämlich $\pi = \mu_x / \mathbb{E}_x[S_{\{x\}}]$. Folglich gilt

$$f \in \ell^1(\pi) \iff f \in \ell^1(\mu_x) .$$

Aus Satz 4.3 folgt somit für $f\in \ell^1(\pi)$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) = \lim_{N\to\infty} \frac{V_x(N)}{N} \cdot \frac{1}{V_x(N)} \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n)$$

$$= \frac{1}{\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}]}\, \mathbb{E}_{\mu_x}[f(X_0)] = \mathbb{E}_\pi[f(X_0)] \quad \mathbb{P}_x\text{-f.s.}$$

<u>Zu zeigen:</u> $\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_\pi\Big[\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) - \mathbb{E}_\pi[f(X_0)]\Big|\Big] = 0$

Sei $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von endlichen Teilmengen von E mit $E_k \uparrow E$. Setze

$$f_k := f\, \mathbb{1}_{E_k} \quad , \quad k\in\mathbb{N}$$

Dann gilt

$$\mathbb{E}_\pi\Big[\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) - \mathbb{E}_\pi[f(X_0)]\Big|\Big]$$

$$= \mathbb{E}_\pi\Big[\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\big(f(X_n)-f_k(X_n)\big) + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_k(X_n) - \mathbb{E}_\pi[f_k(X_0)] + \mathbb{E}_\pi[f_k(X_0)] - \mathbb{E}_\pi[f(X_0)]\Big|\Big]$$

$$\leq 2\,\mathbb{E}_\pi\big[\,|f(X_0)-f_k(X_0)|\,\big] + \mathbb{E}_\pi\Big[\Big|\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_k(X_n) - \mathbb{E}_\pi[f_k(X_0)]}_{\leq 2\|f_k\|_\infty < \infty \ \forall k\in\mathbb{N}}\Big|\Big]$$

wobei benutzt wurde, daß

$$\mathbb{E}_\pi[\,|f(X_n)-f_k(X_n)|\,] \overset{\text{Korollar 1.9}}{=} \sum_{x\in E} (\pi P^n)(x)\,|f(x)-f_k(x)|$$

$$\overset{\pi=\pi P}{=} \sum_{x\in E} \pi(x)\,|f(x)-f_k(x)| = \mathbb{E}_\pi[\,|f(X_0)-f_k(X_0)|\,]$$

Also folgt aus dem Satz von Lebesgue und dem Satz über die monotone Konvergenz

$$\limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}_\pi\Big[\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) - \mathbb{E}_\pi[f(X_0)]\Big|\Big] \leq 2\,\mathbb{E}_\pi\big[|f(X_0)|\,\mathbb{1}_{E_k^c}\big] \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$\square$

Aufgabe 24: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible, positiv rekurrente Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix P. Weiterhin sei $\pi \in \mathrm{Inv}(P)$ das Gleichgewichtsmaß.

a) Zeige, daß für jedes $f \in \ell^2(\pi)$ und $x \in E$ die Reihe

$$(Pf)(x) = \sum_{y\in E} p(x,y)\, f(y)$$

absolut konvergent ist mit $\|Pf\|_{2,\pi} \leq \|f\|_{2,\pi}$.

(Hierbei ist $\|g\|_{p,\pi} := \left(\sum_{x\in E} |g(x)|^p \pi(x)\right)^{1/p}$)

b) Zeige, daß für alle $f \in \ell^2(\pi)$ gilt

$$P \text{ ist aperiodisch} \implies \lim_{n\to\infty} \|P^n f - E_\pi[f(X_0)]\|_{2,\pi} = 0$$

und

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (P^n f) - E_\pi[f(X_0)] \right\|_{2,\pi} = 0$$

c) Zeige mit Hilfe des Resultats aus b), daß es keine Funktion $f \in \ell^2(\pi)$ mit $\|f\|_{2,\pi} = 1$, $E_\pi[f(X_0)] = 0$ und $Pf = f$ gibt.