3.2. Struktur der Gleichgewichtsverteilung

Frage: Existenz von invarianten Maßen und Gleichgewichtsverteilungen.

Satz 3.4 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν,P)-Markovkette mit Zustandsraum E und $\emptyset \neq K \subseteq E$ eine rekurrente, kommunizierende Klasse. Für $x\in K$ definiere

$$\mu_x(y) := \mu_x[\{y\}] := \mathbb{E}_x\Big[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbb{1}_{X_n=y}\Big], \qquad y\in E$$

wobei $S_{\{x\}} = \inf\{n\in\mathbb{N} : X_n = x\}$ die erste Trefferzeit des Zustandes $x\in E$ sei.

a) Dann gilt für alle $x,y\in K$ mit $x\neq y$

$$\mathbb{P}_x\big[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}\big] > 0 \quad \text{und} \quad \mathbb{E}_x\Big[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbb{1}_{X_n=y}\Big] = \frac{\mathbb{P}_x[S_{\{y\}}<S_{\{x\}}]}{\mathbb{P}_y[S_{\{x\}}<S_{\{y\}}]}.$$

Insbesondere ist $\mu_x(x)=1$, $\mu_x(y)=0$ für alle $y\in K^c$ und $\mu_x(y)\in(0,\infty)$ für alle $y\in K$.

b) Für jedes $x\in K$ ist μ_x ein invariantes Maß bzgl. P.

c) Ist λ ein invariantes Maß bzgl. P mit $\lambda(x)=1$ für ein $x\in K$ und $\lambda(y)=0$ für alle $y\in K^c$, so gilt $\lambda=\mu_x$.

Beweis: a) Da K eine rekurrente, kommunizierende Klasse ist, so folgt aus Satz 2.12, daß

$$\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] = 1 \qquad \forall x,y \in K$$

Bezeichne weiter mit $S^k_{\{x\}}$ die k-te Treffzeit des Zustandes $x \in E$, d.h.

$$S^0_{\{x\}} := 0 \qquad \text{und} \qquad S^k_{\{x\}} := \inf\{n > S^{k-1}_{\{x\}} : X_n = x\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann folgt aus der starken Markoveigenschaft (Satz 1.15) für $x,y \in K$ mit $x \neq y$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x[S^k_{\{x\}} < S_{\{y\}}] &= \mathbb{P}_x[S^k_{\{x\}} < S_{\{y\}}, S^{k-1}_{\{x\}} < S_{\{y\}}] \\
&= \mathbb{P}_x[S^{k-1}_{\{x\}} < S_{\{y\}}]\, \mathbb{P}_x[S^k_{\{x\}} < S_{\{y\}} \mid \underbrace{S^{k-1}_{\{x\}} < S_{\{y\}}}_{\in \mathcal{F}^X_{S^{k-1}_{\{x\}}}}, X_{S^{k-1}_{\{x\}}} = x, \underbrace{S^{k-1}_{\{x\}} < \infty}_{\mathbb{P}_x[S^{k-1}_{\{x\}} < \infty] = 1 \ \forall k \in \mathbb{N}}] \\
&\overset{\text{Satz 1.15}}{=} \mathbb{P}_x[S^{k-1}_{\{x\}} < S_{\{y\}}]\; \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < S_{\{y\}}] \\
&= \dots \\
&= \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < S_{\{y\}}]^k
\end{aligned}$$

Angenommen $\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}] = 0$. Dann gilt, da $S^k_{\{x\}}(\omega) \geq k$ für alle $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{P}_x[k < S_{\{y\}}] \geq \mathbb{P}_x[S^k_{\{x\}} < S_{\{y\}}] = (1 - \underbrace{\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}]}_{=0})^k = 1$$

Also,

$$0 = \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = \infty] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}_x[k < S_{\{y\}}] \geq 1 \quad ↯$$

Folglich ist $\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}] > 0$.

Zu zeigen: Für $x, y \in K$ mit $x \neq y$ gilt $\mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbb{1}_{X_n = y}\right] = \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}] / \mathbb{P}_y[S_{\{x\}} < S_{\{y\}}]$

Zunächst einmal folgt aus der starken Markoveigenschaft für $N \in \mathbb{N}$ und $z \in E$

$$\mathbb{P}_z[X_{S_{\{y\}}+n} = y,\ n < S_{\{x\}} \wedge N - S_{\{y\}},\ S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N]$$

$$= \mathbb{P}_z[S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N]\ \mathbb{P}_z[X_{S_{\{y\}}+n} = y,\ n < S_{\{x\}} \wedge N - S_{\{y\}} \mid X_{S_{\{y\}}} = y,\ S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N]$$

$$\overset{\text{Satz 1.15}}{=} \mathbb{P}_z[S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N]\ \mathbb{P}_y[X_n = y,\ n < S_{\{x\}} \wedge N] \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

Daraus folgt

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}} \wedge N - 1} \mathbb{1}_{X_n = y}\right] = \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=S_{\{y\}}}^{S_{\{x\}} \wedge N - 1} \mathbb{1}_{X_n = y}\, \mathbb{1}_{S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x[X_{S_{\{y\}}+n} = y,\ n < S_{\{x\}} \wedge N - S_{\{y\}},\ S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N]$$

$$= \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N] \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_y[X_n = y,\ n < S_{\{x\}} \wedge N]$$

$$= \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N]\ \mathbb{E}_y\left[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}} \wedge N - 1} \mathbb{1}_{X_n = y}\right]$$

sowie

$$\mathbb{E}_y\left[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}\wedge N-1} \mathbb{1}_{X_n=y}\right] = 1 + \mathbb{E}_y\left[\sum_{n=S_{\{y\}}}^{S_{\{x\}}\wedge N-1} \mathbb{1}_{X_n=y}\,\mathbb{1}_{S_{\{y\}}<S_{\{x\}}\wedge N}\right]$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_y\left[X_{S_{\{y\}}+n}=y,\ n < S_{\{x\}}\wedge N - S_{\{y\}},\ S_{\{y\}} < S_{\{x\}}\wedge N\right]$$

$$= 1 + \mathbb{P}_y\left[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}\wedge N\right] \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_y\left[X_n=y,\ n < S_{\{x\}}\wedge N\right]$$

$$= 1 + \mathbb{P}_y\left[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}\wedge N\right] \mathbb{E}_y\left[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}\wedge N-1} \mathbb{1}_{X_n=y}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}_y\left[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}\wedge N-1} \mathbb{1}_{X_n=y}\right] = \frac{1}{\mathbb{P}_y\left[S_{\{x\}}\wedge N < S_{\{y\}}\right]}$$

Aus der monotonen Konvergenz und der Stetigkeit der Maße $\mathbb{P}_x$ und $\mathbb{P}_y$ ergibt sich

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbb{1}_{X_n=y}\right] \overset{\mathbb{P}_x[S_{\{x\}}<\infty]=1}{=} \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}\wedge N-1} \mathbb{1}_{X_n=y}\right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{\mathbb{P}_x\left[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}\wedge N\right]}{\mathbb{P}_y\left[S_{\{x\}}\wedge N < S_{\{y\}}\right]} \overset{\mathbb{P}_y[S_{\{x\}}<\infty]=1}{=} \frac{\mathbb{P}_x\left[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}\right]}{\mathbb{P}_y\left[S_{\{x\}} < S_{\{y\}}\right]}$$

Insbesondere ist $\mu_x(x)=1$ nach Definition, $\mu_x(y)\in(0,\infty)$ für alle $y\in K$ und $\mu_x(y)=0$ für alle $y\in K^c$, da in diesem Fall $p_n(x,y)=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

b) Für $y \in K^c$ folgt wegen $z \not\to y$ für alle $z \in K$

$$\sum_{z \in E} \mu_x(z)\, p(z,y) = \sum_{z \in K} \mu_x(z)\, p(z,y) = 0 = \mu_x(y)$$

Sei also nun $y \in K$. Da $x \in K$ nach Voraussetzung rekurrent ist, gilt

$$\mu_x(y) = \mathbb{E}_x\Big[\sum_{n=1}^{S_{\{x\}}} \mathbb{1}_{X_n = y}\Big] + \mathbb{P}_x[X_0 = y] - \mathbb{P}_x[X_{S_{\{x\}}} = y,\ S_{\{x\}} < \infty] \qquad (*)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[X_n = y,\ S_{\{x\}} \geq n] + \mathbb{1}_{x=y}\big(1 - \underbrace{\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty]}_{=1}\big)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{z \in E} \mathbb{P}_x[X_n = y,\ X_{n-1} = z,\ S_{\{x\}} \geq n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{z \in K} \mathbb{P}_x[X_{n-1} = z,\ S_{\{x\}} \geq n]\ \mathbb{P}_x[X_n = y \mid X_{n-1} = z,\ S_{\{x\}} \geq n]$$

Da $\{S_{\{x\}} \geq n\} = \{S_{\{x\}} \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}^X_{n-1}$, folgt aus Satz 1.10

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{z \in K} \mathbb{P}_x[X_{n-1} = z,\ S_{\{x\}} - 1 \geq n-1]\ \mathbb{P}_z[X_1 = y]$$

$$= \sum_{z \in K} p(z,y)\ \mathbb{E}_x\Big[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbb{1}_{X_n = z}\Big]$$

$$= \sum_{z \in E} p(z,y)\ \mu_x(z)$$

Also ist μ_x invariant bzgl. P.

c) Sei λ ein invariantes Maß bzgl. P auf E mit $\lambda(x)=1$ für ein $x\in K$ und $\lambda(y)=0$ für alle $y\in K^c$.

Zu zeigen: $\lambda(y) \geq \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n, X_n = y] \quad \forall y\in K \quad \forall N\in\mathbb{N}$

$\boxed{IA}$ $N=1$: Da λ invariant ist, gilt für alle $y\in K$

$$\lambda(y) = \sum_{z\in E} \lambda(z)\, p(z,y) \geq \underbrace{\lambda(x)}_{=1}\, p(x,y) = \mathbb{P}_x[X_1=y] = \mathbb{P}_x[S_{\{x\}}\geq 1, X_1=y]$$

$\boxed{IS}$ $N\to N+1$: Für $y\in K$ gilt

$$\lambda(y) = \sum_{z\in E} \lambda(z)\, p(z,y) = \sum_{z\in K\setminus\{x\}} \lambda(z)\, p(z,y) + \lambda(x)\, p(x,y)$$

$$\overset{\boxed{IV}}{\geq} \sum_{z\in K\setminus\{x\}} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}}\geq n, X_n=z]\, p(z,y) + \mathbb{P}_x[S_{\{x\}}\geq 1, X_1=y]$$

Da $\{S_{\{x\}}\geq n+1\} = \{S_{\{x\}}\leq n\}^c \in \mathcal{F}_n^X$ gilt für alle $z\in K\setminus\{x\}$

$$\mathbb{P}_x[S_{\{x\}}\geq n+1, X_n=z, X_{n+1}=y]$$

$$= \mathbb{P}_x[S_{\{x\}}\geq n+1, X_n=z]\, \mathbb{P}_x[X_{n+1}=y \mid X_n=z, S_{\{x\}}\geq n+1]$$

$$\overset{\text{Satz 1.6}}{=} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}}\geq n+1, X_n=z]\, \mathbb{P}_z[X_1=y]$$

$$\overset{z\neq x}{=} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}}\geq n, X_n=z]\, p(z,y)$$

Daraus folgt

$$\lambda(y) \geq \sum_{z \in K\setminus\{x\}} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n+1, X_n = z, X_{n+1} = y] + \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq 1, X_1 = y]$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n+1, X_{n+1} = y] + \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq 1, X_1 = y]$$

$$= \sum_{n=1}^{N+1} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n, X_n = y]$$

<u>Zu zeigen:</u> $\lambda = \mu_x$

Zunächst einmal folgt aus der monotonen Konvergenz, daß

$$\lambda(y) \geq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n, X_n = y] = \mathbb{E}_x\Big[\sum_{n=1}^{S_{\{x\}}} \mathbb{1}_{X_n = y}\Big] = \mu_x(y)$$

Insbesondere ist $\lambda - \mu_x$ ein invariantes Maß mit $(\lambda-\mu_x)(y) = 0$ für alle $y \in K^c \cup \{x\}$.

Für $y \in K\setminus\{x\}$ gibt es, da $x \longleftrightarrow y$, ein $n \in \mathbb{N}$ mit $p_n(y,x) > 0$. Daraus folgt

$$0 = (\lambda-\mu_x)(x) = \sum_{z\in E} \underbrace{(\lambda-\mu_x)(z)}_{\geq 0}\, p_n(z,x) \geq (\lambda-\mu_x)(y)\,\underbrace{p_n(y,x)}_{>0}$$

Folglich ist $(\lambda-\mu_x)(y) = 0$ für jedes $y \in K\setminus\{x\}$. Also $\lambda = \mu_x$

$\square$

<u>Bemerkung 21:</u> Im Falle, daß die Menge $\emptyset \neq K \subseteq E$ eine transiente, kommunizierende Klasse ist, so folgt aus der Gleichung (*) im Beweis von Satz 3.4 b), daß

$$\mu_x(y) \geq \sum_{z \in E} \mu_x(z)\, p(z,y), \qquad y \in E$$

wobei für $y \in E \setminus \{x\}$ die Gleichheit gilt.

<u>Satz 3.5</u> Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E und $\emptyset \neq K \subseteq E$ eine rekurrente, kommunizierende Klasse. Dann existiert ein bzgl. P invariantes Maß $\pi : E \to [0,\infty)$ mit $\pi(y) = 0$ für alle $y \in K^c$, daß bis auf konstantes Vielfaches in $[0,\infty]$ eindeutig bestimmt ist.

<u>Beweis:</u> (Existenz) Dies folgt direkt aus Satz 3.4 a) und b).

(Eindeutigkeit bis auf konstantes Vielfaches) Sei also π ein invariantes Maß bzgl. P mit $\pi(y) = 0$ für alle $y \in K^c$. Falls $\pi(y) = \infty$ bzw. $\pi(y) = 0$ für alle $y \in K$, so gilt für ein festes $x \in K$, daß

$$\pi = c\, \mu_x \quad \text{für ein festes } x \in K \text{ und } c \in \{0, \infty\}.$$

Sei nun also π weder konstant Null bzw. unendlich. Dann existiert ein $x \in K$ mit $\pi(x) \in (0,\infty)$. Betrachte das Maß $\lambda(y) := \pi(y)/\pi(x)$. Dann genügt λ den Voraussetzungen von Satz 3.4a). Folglich ist

$$\lambda = \mu_x \quad \Longleftrightarrow \quad \pi = \pi(x)\,\mu_x .$$

$\square$

<u>Bemerkung 22</u>: Wenn $\emptyset \neq K \subseteq E$ eine transiente, kommunizierende Klasse ist, so können invariante Maße existieren, die keine konstanten Vielfache voneinander sind (siehe Bsp. 30).

<u>Satz 3.6</u> Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν,P)-Markovkette mit Zustandsraum E und $\emptyset \neq K \subseteq E$ eine kommunizierende Klasse. Dann gelten folgende Aussagen:

a) Es gibt ein $\pi \in \mathrm{Inv}(P)$ mit $\sum_{x\in K} \pi(x) = 1$ genau dann, wenn K positiv rekurrent ist. Insbesondere ist

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}]} \qquad \forall x \in K$$

b) Wenn $K \neq E$ transient ist und $\pi \in \mathrm{Inv}(P)$, so ist $\pi(x) = 0$ für alle $x \in K$.

Beweis: "$\Rightarrow$" Sei $\pi \in \mathrm{Inv}(P)$ mit $\sum_{x\in K} \pi(x) = 1$. Dann gibt es ein $x \in K$ mit $\pi(x) > 0$. Für jedes $y \in K$ gilt $x \leftrightarrow y$. Also folgt aus Bemerkung 19c), daß $\pi(y) > 0$ für alle $y \in K$. Betrachte nun das invariante Maß $\lambda = \pi / \pi(x)$. Dann folgt aus Satz 3.4c), daß $\lambda = \mu_x$.

Insbesondere ist

$$\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}] = \sum_{y\in K} \mathbb{E}_x\Big[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbb{1}_{X_n=y}\Big] = \sum_{y\in K} \mu_x(y) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{y\in K} \pi(y) = \frac{1}{\pi(x)} < \infty.$$

Folglich ist x positiv rekurrent und es gilt nach Bemerkung 16, daß jedes $y \in K$ positiv rekurrent ist. Zudem gilt

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}]} \qquad \forall\, x \in K$$

d.h. π ist eindeutig bestimmt.

"$\Leftarrow$" Sei K eine positiv rekurrente Klasse. Dann gilt für ein $x \in K$

$$\sum_{y\in K} \mu_x(y) = \mathbb{E}_x[S_{\{x\}}] < \infty$$

Folglich ist nach Satz 3.4 $\pi(y) := \mu_x(y) / \mathbb{E}_x[S_{\{x\}}]$ eine Gleichgewichtsverteilung mit $\pi(y) = 0$ für alle $y \in K^c$. Also $\sum_{y\in K} \pi(y) = 1$.

b) Folgt aus Satz 3.1 b).

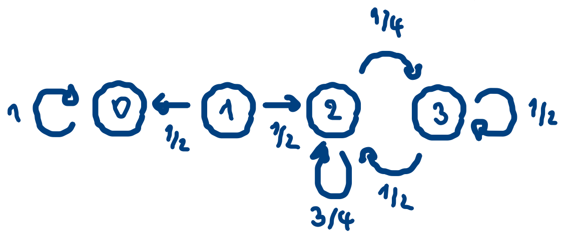
$\square$

<u>**Korollar 3.7**</u> Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible (ν,P)-Markovkette auf einem endlichen Zustandsraum E. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Gleichgewichtsverteilung.

<u>Beweis:</u> Dies folgt aus Satz 2.11 und Satz 3.6.

$\square$

<u>**Beispiel 33**</u>: Betrachte eine Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $E=\{0,1,2,3\}$, dessen Übergangsmatrix P durch den folgenden Übergangsgraphen beschrieben wird



Dann bilden die Zustände $\{0\}$ und $\{2,3\}$ jeweils eine kommunizierende, positiv rekurrente Klasse, während der Zustand $\{1\}$ transient ist. Folglich sind

$$\pi_1 = \mathbb{1}_{\{0\}} \quad \text{und} \quad \pi_2 = \frac{2}{3}\mathbb{1}_{\{2\}} + \frac{1}{3}\mathbb{1}_{\{3\}}$$

die beiden extremalen Gleichgewichtsverteilungen in $\mathrm{Inv}(P)$. Zudem ist $\mathbb{E}_2[S_{\{2\}}] = \frac{3}{2}$.

Aufgabe 21: Sei $\alpha \in (0,1)$ und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $E = \mathbb{N}_0$ und Übergangsmatrix $P = (p(x,y))_{x,y \in E}$ mit

a)
$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2-\alpha}, & y = x-1 \wedge x \in \mathbb{N} \quad \text{oder} \quad x = y = 0 \\ \frac{1-\alpha}{2-\alpha}, & y = x+1 \end{cases}$$

Zeige, daß die geometrische Verteilung mit geeignetem Parameter reversibel ist.

b)
$$p(x,y) = \begin{cases} \alpha, & y = 0 \\ 1-\alpha, & y = x+1 \end{cases}$$

Zeige, daß die geometrische Verteilung mit geeignetem Parameter invariant bezüglich P aber nicht reversibel ist.

Berechne in beiden Fällen zudem

$$\mathbb{E}_0[S_{\{0\}}] \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to \infty} \mathbb{E}_x[S_{\{x\}}].$$