3. Gleichgewichtsverteilung und invariante Maße

3.1. Eigenschaften von invarianten und reversiblen Maßen

Definition (invariantes Maß, Gleichgewichtsverteilung)

Sei $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ eine stochastische Matrix. Ein Maß π auf E heißt invariantes Maß bezüglich P, falls

$$\pi(x) = (\pi P)(x) = \sum_{y\in E} \pi(y)\, p(y,x) \qquad \forall x \in E$$

Falls π invariant und eine Verteilung ist, d.h. $\pi[E]=1$, so nennt man π eine Gleichgewichtsverteilung (oder invariante Verteilung). Bezeichne mit

$$\mathrm{Inv}(P) := \{ \pi : E \to [0,1] \;:\; \pi P = \pi \text{ und } \pi[E] = 1 \}$$

die Menge der Gleichgewichtsverteilungen.

Bemerkung 19: a) Ein invariantes Maß $\pi : E \to [0,\infty]$ ist als Zeilenvektor $(\pi \in [0,\infty]^E)$ aufgefaßt ein (nichtnegativer) Linkseigenvektor von P zum Eigenwert 1.

b) Ist $|E| < \infty$, so kann jedes invariante Maß zu einer Gleichgewichtsverteilung normiert werden.

c) Ist π ein invariantes Maß bzgl. P, so gilt $\pi = \pi P^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Falls P zudem irreduzible und $\pi \neq 0$ ist, so folgt

$$\pi(x) > 0 \qquad \forall x \in E.$$

Da nämlich $\pi \neq 0$, gibt es ein $z \in E$ mit $\pi(z) > 0$. Aus der Irreduzibilität von P folgt weiterhin, daß zu jedem $x \in E \setminus \{z\}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $p_n(z,x) > 0$.

Also,

$$\pi(x) = (\pi P^n)(x) = \sum_{y \in E} \pi(y) p_n(y,x) \geq \underbrace{\pi(z)}_{>0} \underbrace{p_n(z,x)}_{>0} > 0.$$

d) Ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix P. Wenn π eine Gleichgewichtsverteilung ist, so gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}_\pi[X_n = x] = \sum_{y \in E} \pi(y) \mathbb{P}_y[X_n = x] = \sum_{y \in E} \pi(y) p_n(y,x) = \pi(x).$$

Insbesondere ist

$$\mathbb{P}_\pi[X_{k+1} = x_1, \ldots, X_{k+n} = x_n] = \sum_{y \in E} \mathbb{P}_\pi[X_k = y] \, \mathbb{P}_\pi[X_{k+1} = x_1, \ldots, X_{k+n} = x_n \mid X_k = y]$$

$$\overset{\text{Satz 1.10}}{=} \sum_{y \in E} \pi(y) \mathbb{P}_y[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n]$$

$$= \mathbb{P}_\pi[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n]$$

e) Für $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{Inv}(P)$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt $(\lambda\pi_1 + (1-\lambda)\pi_2)[E] = \lambda + (1-\lambda) = 1$ und

$$(\lambda\pi_1 + (1-\lambda)\pi_2)P = \lambda\pi_1 P + (1-\lambda)\pi_2 P = \lambda\pi_1 + (1-\lambda)\pi_2 .$$

Folglich ist die Menge $\mathrm{Inv}(P)$ der Gleichgewichtsverteilungen konvex.

<u>Beispiel 27</u>: Sei $E = \{1,2\}$ und $P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$ mit $\alpha, \beta \in [0,1]$. Dann ist für $\alpha + \beta \neq 0$ die Gleichgewichtsverteilung π gegeben durch

$$\pi(1) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \quad \text{und} \quad \pi(2) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Für $\alpha = \beta = 0$ gilt

$$\mathrm{Inv}(P) = \{ \lambda \cdot \mathbb{1}_{\{1\}} + (1-\lambda)\, \mathbb{1}_{\{2\}} \ : \ \lambda \in [0,1] \}.$$

<u>Beispiel 28</u>: (Irrfahrt auf dem Torus) Sei $E = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$ für $N \geq 2$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf E mit Übergangswahrscheinlichkeiten $p(x,y) = \mu(y-x)$ für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf E. Dann ist $\pi(x) = N^{-d}$, $x \in E$ eine Gleichgewichtsverteilung, denn

$$\sum_{y\in E} \pi(y)\, p(y,x) = N^{-d} \sum_{y\in E} \mu(y-x) = N^{-d} \sum_{y\in E} \mu(y) = N^{-d} = \pi(x) \qquad \forall x \in E.$$

Beispiel 29: Sei $E = (\mathbb{Z}/(2N)\mathbb{Z})$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt auf E mit

$$p(x,y) = \begin{cases} p, & y = x+2 \mod 2N \\ 1-p, & y = x-2 \mod 2N \end{cases} \qquad p\in(0,1)$$

Bezeichne mit

$$G := \{2k : k\in\mathbb{N}_0\}\cap E \qquad \text{und} \qquad U := \{2k+1 : k\in\mathbb{N}_0\}\cap E$$

und setze für $\lambda\in[0,1]$

$$\pi_\lambda(x) := \frac{\lambda}{N}\mathbb{1}_G(x) + \frac{1-\lambda}{N}\mathbb{1}_U(x) \qquad , x\in E$$

Dann gilt

$$\sum_{y\in E}\pi_\lambda(y)\,p(y,x) = \frac{\lambda}{N}\sum_{y\in G}p(y,x) + \frac{1-\lambda}{N}\sum_{y\in U}p(y,x)$$

$$= \frac{\lambda}{N}\mathbb{1}_G(x)\,(1-p+p) + \frac{1-\lambda}{N}\mathbb{1}_U(x)\,(1-p+p) = \pi_\lambda(x)$$

für alle $x\in E$. Folglich ist $\pi_\lambda\in \mathrm{Inv}(P)$ für alle $\lambda\in[0,1]$, d.h. $|\mathrm{Inv}(P)| = \infty$.

Beachte, daß die stochastische Matrix P nicht irreduzibel ist und zwei kommunizierende Klassen besitzt, nämlich die Menge G und U.

Satz 3.1 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν,P)-Markovkette mit Zustandsraum E.

a) Falls $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel ist, so gilt $|\mathrm{Inv}(P)| \in \{0,1\}$. D.h. es gibt höchstens eine Gleichgewichtsverteilung.

b) Falls $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel und transient ist, so gilt $\mathrm{Inv}(P) = \emptyset$. D.h. es gibt keine Gleichgewichtsverteilung.

Beweis: a) Definiere $\overline{P} = (\overline{p}(x,y))_{x,y\in E}$ durch $\overline{p}(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} p_n(x,y)$, $x,y\in E$. Dann ist $\overline{P}$ eine stochastische Matrix, denn für alle $x\in E$ gilt

$$\sum_{y\in E} \overline{p}(x,y) \overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sum_{y\in E} p_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$$

Da P nach Voraussetzung irreduzibel ist, folgt $\overline{p}(x,y) > 0$ für alle $x,y\in E$. Angenommen es gäbe zwei Gleichgewichtsverteilungen $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{Inv}(P)$ mit $\pi_1 \neq \pi_2$. Da

$$(\pi_i \overline{P})(x) = \sum_{y\in E} \pi_i(y)\, \overline{p}(y,x) \overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sum_{y\in E} \pi_i(y)\, p(y,x) = \pi_i(x) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \pi_i(x)$$

für alle $x\in E$ und $i\in\{1,2\}$, ist $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{Inv}(\overline{P})$. Betrachte nun das signierte Maß

$$\overline{\pi} := \pi_1 - \pi_2 .$$

Dann gilt $\bar{\pi}\bar{P} = \pi_1\bar{P} - \pi_2\bar{P} = \pi_1 - \pi_2 = \bar{\pi}$. Da $\bar{\pi} \neq 0$ und $\bar{\pi}[E] = 0$ existieren $x, y \in E$ mit $\bar{\pi}(x) > 0$ und $\bar{\pi}(y) < 0$. Weiterhin gilt

$$\sum_{z \in E} |\bar{\pi}(z)| = \sum_{z \in E} |(\bar{\pi}\bar{P})(z)| = \sum_{z \in E} |\underbrace{\bar{\pi}(x)\bar{p}(x,z)}_{>0} + \underbrace{\bar{\pi}(y)\bar{p}(y,z)}_{<0} + \sum_{\substack{z' \in E \\ z' \neq x,y}} \bar{\pi}(z')\bar{p}(z',z)|$$

$$< \sum_{z \in E} \sum_{z' \in E} |\bar{\pi}(z')| \bar{p}(z',z)$$

$$= \sum_{z' \in E} |\bar{\pi}(z')| \qquad \lightning$$

Folglich ist $\bar{\pi} = 0$, d.h. $\pi_1 = \pi_2$.

b) Angenommen $\mathrm{Inv}(P) \neq \emptyset$, d.h. es gibt eine Gleichgewichtsverteilung π. Nach Voraussetzung ist jeder Zustand $y \in E$ transient. Also folgt aus dem Korollar 2.2 und dem Satz von Lebesgue

$$0 = \sum_{x \in E} \pi(x) \lim_{n \to \infty} p_n(x,y) = \lim_{n \to \infty} \sum_{x \in E} \pi(x) p_n(x,y) = \pi(y) \qquad \forall y \in E$$

Also $\sum_{y \in E} \pi(y) = 0 \neq 1$ $\lightning$. Folglich gibt es keine Gleichgewichtsverteilung.

$\square$

Beispiel 29: (doppelt stochastische Übergangsmatrizen) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν,P)-Markovkette mit Zustandsraum E, wobei die Übergangsmatrix P folgende Eigenschaft besitzt

$$\sum_{y\in E} p(y,x) = 1 \qquad \forall\, x\in E,$$

d.h. P ist doppelt stochastisch. Ein Spezialfall von doppelt stochastischen Matrizen ist

$$p(x,y) = \mu(y-x) \qquad , \; x,y\in E$$

für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf E. Dann ist $\pi(x)=1$ für alle $x\in E$ ein invariantes Maß, denn

$$\sum_{y\in E}\pi(y)\,p(y,x) = \sum_{y\in E} p(y,x) = 1 = \pi(x) \qquad , \; x\in E.$$

Beispiel 30: (Einfache, asymmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf $E=\mathbb{Z}$ mit $p(x,x+1)=p$ und $p(x,x-1)=1-p$ für alle $x\in E$ und $p\in(0,1)$.

Nach Beispiel 29 ist $\pi(x)=1$ für alle $x\in E$ ein invariantes Maß. Für $p\neq 1/2$ ist zudem $\pi(x)=\left(\frac{p}{1-p}\right)^x$, $x\in E$ ein invariantes Maß, denn

$$\sum_{y\in E}\pi(y)\,p(y,x) = \pi(x-1)\,p(x-1,x)+\pi(x+1)\,p(x+1,x) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^x(1-p+p) = \pi(x).$$

<u>Satz 3.2</u> Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible (π,P)-Markovkette mit Zustandsraum E, wobei angenommen sei, daß die Startverteilung π invariant ist. Dann ist für jedes $N\in\mathbb{N}_0$ der stochastische Prozeß $(Y_n)_{0\le n\le N}$ mit $Y_n := X_{N-n}$ eine (π,P^*)-Markovkette mit

$$p^*(x,y) := \frac{\pi(y)\,p(y,x)}{\pi(x)} \qquad \forall\, x,y\in E.$$

Die stochastische Matrix P^* heißt auch duale Übergangsmatrix.

<u>Beweis:</u> Da P irreduzibel ist, ist nach Bemerkung 19 c) $\pi(x)>0$ für alle $x\in E$. Somit sind die Matrixeinträge von P^* wohldefiniert. Zudem gilt

$$\sum_{y\in E} p^*(x,y) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{y\in E} \pi(y)\,p(y,x) = 1 \qquad \forall\, x\in E$$

d.h. P^* ist eine stochastische Matrix. Aufgrund von Satz 1.7 (i) genügt es nun

<u>Zu zeigen:</u> $\forall\, n\in\{0,1,\dots,N\}$ und $y_0,\dots,y_n\in E$ gilt

$$P_\pi[Y_0=y_0,\dots,Y_n=y_n] = \pi(y_0)\,p^*(y_0,y_1)\cdot\ldots\cdot p^*(y_{n-1},y_n)$$

Für $n\in\{0,\dots,N\}$ und $y_0,\dots,y_n\in E$ betrachte nun

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_\pi[Y_0=y_0,\dots,Y_n=y_n] &= \mathbb{P}_\pi[X_N=y_0,\dots,X_{N-n}=y_n] \\
&= \mathbb{P}_\pi[X_{N-n}=y_n]\,\mathbb{P}_\pi[X_N=y_0,\dots,X_{N-n+1}=y_{n-1} \mid X_{N-n}=y_n] \\
&\overset{\text{Satz 1.10}}{=} \mathbb{P}_\pi[X_{N-n}=y_n]\,\mathbb{P}_{y_n}[X_n=y_0,\dots,X_1=y_{n-1}] \\
&\overset{\text{Satz 1.8}}{=} (\underbrace{\pi P^{N-n}}_{\pi})(y_n)\,\mathbb{P}_{y_n}[X_1=y_{n-1},\dots,X_n=y_0] \\
&\overset{\text{Satz 1.7}}{=} \pi(y_n)\,p(y_n,y_{n-1})\cdot\ldots\cdot p(y_1,y_0) \\
&= \pi(y_0)\,p^*(y_0,y_1)\cdot\ldots\cdot p^*(y_{n-1},y_n)
\end{aligned}
$$

Somit ist nach Satz 1.7 (i) $(Y_n)_{0\le n\le N}$ eine (π,P^*)-Markovkette.

$\square$

Definition (reversibel)

Ein Maß π auf E heißt reversibel bezüglich einer stochastischen Matrix $P=(p(x,y))_{x,y\in E}$, falls die sog. "detailed balance" Bedingung erfüllt ist:

$$\pi(x)\,p(x,y) = \pi(y)\,p(y,x) \qquad \forall\, x,y\in E$$

Eine stochastische Matrix P nennt man reversibel, falls ein bzgl. P reversibles Maß existiert.

<u>Bemerkung 20</u>: a) π reversibel bzgl. P $\Rightarrow$ π invariant bzgl. P

b) Falls P reversibel und irreduzibel ist, so ist $P = P^*$.

<u>Beispiel 31</u>: (Ehrenfest's Urnenmodell) In zwei Urnen liegen N Kugeln. Zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ wird eine Kugel zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt, die die Urne dann wechselt. Die Anzahl der Kugeln in der ersten Urne wird durch eine Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $E = \{0, \dots, N\}$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{N}, & y = x-1 \wedge x \geq 1 \\ 1 - \frac{x}{N}, & y = x+1 \wedge x \leq N-1 \end{cases}$$

beschrieben. Sei $\pi(x) := 2^{-N}\binom{N}{x}$. Dann gilt für alle $x \in \{0, \dots, N-1\}$

$$\pi(x)\, p(x,x+1) = 2^{-N}\binom{N}{x}\left(1 - \frac{x}{N}\right) = 2^{-N} \frac{N!}{x!\,(N-x)!} \cdot \frac{N-x}{N}$$

$$= 2^{-N} \frac{(N-1)!}{x!\,(N-x-1)!} = 2^{-N} \frac{N!}{(x+1)!\,(N-(x+1))!} \cdot \frac{x+1}{N} = \pi(x+1)\, p(x+1,x)$$

Folglich ist π ein bzgl. P reversibles Wahrscheinlichkeitsmaß.

Satz 3.3 (Kolmogorov's Zykelbedingung) Sei $P = (p(x,y))_{x,y \in E}$ eine irreduzible, stochastische Matrix. Ein Maß π auf E ist genau dann reversibel bzgl. P, wenn

(i) $p(x,y) > 0 \Rightarrow p(y,x) > 0 \quad \forall x,y \in E$

(ii) für jeden Zykel $x_0, x_1, \dots, x_n$ mit $x_n = x_0$ und $\prod_{i=1}^{n} p(x_i, x_{i-1}) > 0$ gilt

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{p(x_{i-1}, x_i)}{p(x_i, x_{i-1})} = 1$$

Beweis: "$\Rightarrow$" Da π reversibel bzgl. P ist, ist folglich π ein invariantes Maß. Da P zudem irreduzibel ist, so folgt aus Bemerkung 1.9 c), daß $\pi(x) > 0$ für alle $x \in E$.

Zu zeigen: $p(x,y) > 0 \Rightarrow p(y,x) > 0$

Sei also $p(x,y) > 0$. Dann ergibt sich aus der "detailed balance" Bedingung

$$p(y,x) = \frac{\pi(y)}{\pi(y)} p(y,x) = \underbrace{\frac{\pi(x)}{\pi(y)}}_{>0} \underbrace{p(x,y)}_{>0} > 0.$$

Betrachte nun $x_0, \dots, x_n \in E$ mit $x_n = x_0$ und $\prod_{i=1}^{n} p(x_i, x_{i-1}) > 0$.

Zu zeigen: $\prod_{i=1}^{n} \frac{p(x_{i-1}, x_i)}{p(x_i, x_{i-1})} = 1$

Wiederum ergibt sich aus der "detailed balance" Bedingung

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{p(x_{i-1},x_i)}{p(x_i,x_{i-1})} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\pi(x_{i-1})}{\pi(x_{i-1})} \cdot \frac{p(x_{i-1},x_i)}{p(x_i,x_{i-1})} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\pi(x_i)}{\pi(x_{i-1})} = \frac{\pi(x_n)}{\pi(x_0)} \overset{x_0=x_n}{=} 1$$

"$\Leftarrow$" Für ein festes $z \in E$ setze $\pi(z) = 1$. Aus der Irreduzibilität von P folgt, daß zu jedem $x \in E$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $p_n(z,x) > 0$. Folglich existieren $x_0, \dots, x_n \in E$ mit

$$x_0 = z \, , \; x_n = x \quad \text{und} \quad \prod_{i=1}^{n} p(x_i, x_{i-1}) > 0 \, .$$

Definiere

$$\pi(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{p(x_{i-1},x_i)}{p(x_i,x_{i-1})}$$

<u>Zu zeigen:</u> $\pi(x)$ ist unabhängig vom gewählten Pfad

Sei $(x_0', \dots, x_m')$ ein weiterer Pfad in E mit $x_0' = z$, $x_m' = x$ und $\prod_{j=1}^{m} p(x_j', x_{j-1}') > 0$.
Dann folgt aus (i), daß auch $\prod_{j=1}^{m} p(x_{j-1}', x_j') > 0$. Setze

$$(y_0, \dots, y_{n+m}) = (x_0, \dots, x_n, x_{m-1}', \dots, x_0')$$

Dann gilt

$$y_0 = y_{n+m} = z \qquad \text{und} \qquad \prod_{i=1}^{n+m} p(y_i, y_{i-1}) \overset{x'_m = x_n}{=} \prod_{i=1}^{n} p(x_i, x_{i-1}) \prod_{j=1}^{m} p(x'_{j-1}, x'_j) > 0$$

Also folgt aus (ii)

$$\pi(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{p(x_{i-1}, x_i)}{p(x_i, x_{i-1})} = \prod_{j=1}^{m} \frac{p(x'_{j-1}, x'_j)}{p(x'_j, x'_{j-1})} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{n+m} \frac{p(y_{i-1}, y_i)}{p(y_i, y_{i-1})}}_{=1} = \prod_{j=1}^{m} \frac{p(x'_{j-1}, x'_j)}{p(x'_j, x'_{j-1})}$$

Folglich ist $\pi(x)$ unabhängig vom gewählten Pfad.

<u>Zu zeigen</u>: $\qquad \pi(x)\, p(x,y) = \pi(y)\, p(y,x)$

Falls $p(x,y) = 0$, so ist aufgrund von (i) auch $p(y,x) = 0$ und die Aussage ist trivial.

Sei nun also $p(x,y) > 0$. Dann ist wegen (i) auch $p(y,x) > 0$. Zudem gilt

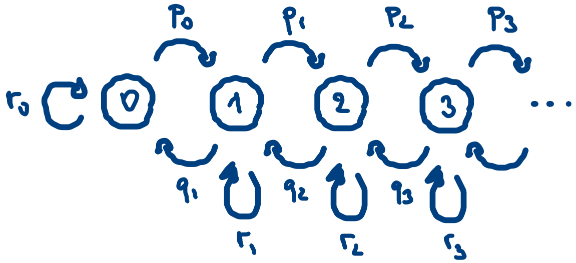
$$\pi(x)\, p(x,y) = \prod_{i=1}^{n} \frac{p(x_{i-1}, x_i)}{p(x_i, x_{i-1})} \cdot p(x,y)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{p(x_{i-1}, x_i)}{p(x_i, x_{i-1})} \cdot \frac{p(x,y)}{p(y,x)} \cdot p(y,x) = \pi(y)\, p(y,x),$$

da mit $x_{n+1} := y$ der Pfad $(x_0, \dots, x_n, x_{n+1})$ die Eigenschaft hat, daß $x_0 = z$, $x_{n+1} = y$

und $\prod_{i=1}^{n+1} p(x_i, x_{i-1}) > 0$. $\square$

Beispiel 32: (Geburts- und Todesprozeß) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf $E=\mathbb{N}_0$, dessen Übergangsmatrix P durch den folgenden Übergangsgraphen beschrieben wird



$$p(x,y) = \begin{cases} p_x, & y=x+1 \\ r_x, & y=x \\ q_x, & y=x-1 \wedge x\geq 1 \end{cases} \qquad p_x+r_x+q_x=1$$

wobei angenommen sei, daß $q_x>0$ für alle $x\in\mathbb{N}$. Setze

$$\pi(0):=1 \qquad \text{und} \qquad \pi(x)=\prod_{y=1}^{x}\frac{p_{y-1}}{q_y}, \qquad x\in\mathbb{N}$$

Dann gilt

$$\pi(x-1)\,p(x-1,x) = \pi(x-1)\,p_{x-1} = \pi(x-1)\frac{p_{x-1}}{q_x}\,p(x,x-1) = \pi(x)\,p(x,x-1)$$

Folglich ist π reversibel bzgl. P und insbesondere ein invariantes Maß. Falls zudem gilt, daß

$$\sum_{x\in E}\pi(x) = \sum_{x\in E}\prod_{y=1}^{x}\frac{p_{y-1}}{q_y} < \infty$$

so läßt sich π zu einer Gleichgewichtsverteilung normieren.