2.3. Kriterien für Rekurrenz und Transienz

Satz 2.13 Sei $h: E \to [0,\infty)$ eine Funktion mit der Eigenschaft, daß $(Lh)(x) \leq 0$ für alle $x \in E$. Falls es ein $y \in E$ gibt mit $(Lh)(y) < 0$, so ist y transient.

Beweis: Zunächst einmal gilt für jede beschränkte Funktion $f: E \to \mathbb{R}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$

$$(P^n f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (P^{k+1} f)(x) - (P^k f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (P^k Lf)(x) \qquad \forall x \in E.$$

Setze $g := -Lh \geq 0$. Dann gilt nach Voraussetzung, daß $g(y) > 0$. Daraus folgt

$$h(y) \geq \liminf_{m\to\infty} \Big((h \wedge m)(y) - \big(P^n (h \wedge m)\big)(y) \Big) \overset{\text{Fatou}}{\geq} \sum_{k=0}^{n-1} (P^k g)(y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{z \in E} p_k(y,z) g(z) \geq g(y) \sum_{k=0}^{n-1} p_k(y,y)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Also,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k(y,y) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} p_k(y,y) \leq \frac{h(y)}{g(y)} < \infty$$

Folglich ist der Zustand y nach Satz 2.1 transient. $\square$

Bemerkung 17: Eine derartige Funktion h bezeichnet man auch als eine Lyapunovfunktion.

Satz 2.14 (Dynkin-Formel) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν,P)-Markovkette mit Zustandsraum E und T eine Stoppzeit mit $\mathbb{E}_x[T]<\infty$ für alle $x\in E$. Dann gilt für jede beschränkte Funktion $f: E\to\mathbb{R}$

$$\mathbb{E}_x[f(X_T)] - f(x) = \mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=0}^{T-1}(Lf)(X_k)\Big] \qquad \forall x\in E.$$

Beweis: Zunächst einmal ist $\{T\le n-1\}\in\mathcal{F}^X_{n-1}$ für jedes $n\in\mathbb{N}$. Weiterhin gilt

$$\mathbb{P}_x[X_{T\wedge n}=y] = \mathbb{P}_x[X_{T\wedge n}=y,\, T\le n-1] + \mathbb{P}_x[X_{T\wedge n}=y,\, T>n-1]$$

$$= \mathbb{P}_x[X_T=y,\, T\le n-1] + \sum_{z\in E}\mathbb{P}_x[X_{n-1}=z,\, T>n-1]\,\mathbb{P}_x[X_n=y\,|\,\underbrace{T>n-1}_{\in\mathcal{F}^X_{n-1}},\, X_{n-1}=z]$$

$$= \mathbb{P}_x[X_T=y,\, T\le n-1] + \sum_{z\in E}\mathbb{P}_x[X_{n-1}=z,\, T>n-1]\,p(z,y)$$

Daraus folgt

$$\mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge n})] = \sum_{y\in E} f(y)\,\mathbb{P}_x[X_{T\wedge n}=y]$$

$$= \sum_{y\in E} f(y)\,\mathbb{P}_x[X_T=y,\, T\le n-1] + \sum_{z\in E}(Pf)(z)\,\mathbb{P}_x[X_{n-1}=z,\, T>n-1]$$

$$= \mathbb{E}_x\big[f(X_{T\wedge(n-1)})\,\mathbb{1}_{T\le n-1}\big] + \mathbb{E}_x\big[(Pf)(X_{n-1})\,\mathbb{1}_{T>n-1}\big]$$

Daraus ergibt sich dann aber

$$\mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge n})] = \mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge(n-1)})] + \mathbb{E}_x[(Lf)(X_{n-1})\mathbb{1}_{T>(n-1)}]$$

Induktiv folgt somit

$$\mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge n})] - f(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_x[(Lf)(X_{k-1})\mathbb{1}_{T>(k-1)}]$$

$$= \mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=0}^{n-1}(Lf)(X_k)\mathbb{1}_{T>k}\Big] = \mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=0}^{T\wedge n-1}(Lf)(X_k)\Big]$$

Da nach Voraussetzung f beschränkt und $\mathbb{E}_x[T]<\infty$ ist, so folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$\mathbb{E}_x[f(X_T)] - f(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge n})] - f(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=0}^{T\wedge n-1}(Lf)(X_k)\Big] = \mathbb{E}_x\Big[\sum_{k=0}^{T-1}(Lf)(X_k)\Big].$$

$\square$

<u>Lemma 2.15</u> Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible (ν,P)-Markovkette mit Zustandsraum E und $\emptyset\neq A\subseteq E$.

a) Falls $\mathbb{P}_x[S_A<\infty]<1$ für ein $x\in E$, so ist jeder Zustand $y\in E$ transient.

b) Falls A endlich und $\mathbb{P}_x[S_A<\infty]=1$ für alle $x\in A$, so ist jeder Zustand $y\in E$ rekurrent.

Beweis: Da nach Voraussetzung $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel ist, gibt es nach Definition nur eine kommunizierende Klasse.

a) Sei $\mathbb{P}_x[S_A < \infty] < 1$ für ein $x \in E$. Da für $z \in A$ gilt $S_{\{z\}}(\omega) \geq S_A(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$, folgt

$$0 < \mathbb{P}_x[S_A = \infty] = \mathbb{P}_x[S_{\{z\}} \geq S_A, S_A = \infty] \leq \mathbb{P}_x[S_{\{z\}} = \infty] \iff \mathbb{P}_x[S_{\{z\}} < \infty] < 1.$$

Angenommen z wäre rekurrent, d.h. $\mathbb{P}_z[S_{\{z\}} < \infty] = 1$. Dann folgt aus Satz 2.12 aber

$$\mathbb{P}_x[S_{\{z\}} < \infty] = 1 \quad \lightning$$

Also ist $\mathbb{P}_z[S_{\{z\}} < \infty] < 1$, d.h. z ist transient. Der Satz 2.10 impliziert dann aber auch, daß jeder Zustand $y \in E$ transient ist.

b) Bezeichne wieder mit S_A^k die k-te Treffzeit der Menge A, d.h.

$$S_A^0 := 0 \qquad \text{und} \qquad S_A^k := \inf\{n > S_A^{k-1} : X_n \in A\}, \qquad k \in \mathbb{N}$$

Da $\mathbb{P}_x[S_A < \infty] = 1$ für alle $x \in A$, so folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_x[S_A^n < \infty] = \sum_{y \in A} \mathbb{P}_x[S_A^n < \infty \mid S_A^{n-1} < \infty, X_{S_A^{n-1}} = y] \, \mathbb{P}_x[S_A^{n-1} < \infty, X_{S_A^{n-1}} = y]$$

$$\overset{\text{Satz 1.15}}{=} \sum_{y\in A} \underbrace{\mathbb{P}_y[S_A<\infty]}_{=1}\ \mathbb{P}_x[S_A^{n-1}<\infty,\ X_{S_A^{n-1}}=y]$$

$$= \mathbb{P}_x[S_A^{n-1}<\infty]$$

Induktiv ergibt sich daraus, daß $\mathbb{P}_x[S_A^n<\infty]=1$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $x\in A$.

Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel ist, gilt für alle $x\in A$ und $y\in E\setminus A$, daß $x\leftrightarrow y$, d.h.

$$\mathbb{P}_x[S_{\{y\}}=\infty]<1.$$

Folglich existiert zu jedem $x\in A$ ein $N_x\in\mathbb{N}$ und $\varepsilon_x>0$ mit

$$\mathbb{P}_x[n<S_{\{y\}}]\leq 1-\varepsilon_x \qquad \forall\, n\geq N_x$$

Setze $N:=\max\{N_x : x\in A\}$ und $\varepsilon:=\min\{\varepsilon_x : x\in A\}$. Da A endlich ist, gilt $N<\infty$, $\varepsilon>0$ und

$$\mathbb{P}_x[n<S_{\{y\}}]\leq 1-\varepsilon \qquad \forall\, n\geq N \text{ und } x\in A.$$

Da $S_A^n\geq n$, folgt somit

$$\mathbb{P}_x[S_A^n<S_{\{y\}}]\leq 1-\varepsilon \qquad \forall\, n\geq N \text{ und } x\in A.$$

Zudem gilt für alle $k\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_x\left[S_A^{kN} < S_{\{y\}} \right] = \sum_{z\in A} \mathbb{P}_x\left[S_A^{kN} < S_{\{y\}} \,\middle|\, S_A^{(k-1)N} < S_{\{y\}},\ X_{S_A^{(k-1)N}} = z \right] \mathbb{P}_x\left[S_A^{(k-1)N} < S_{\{y\}},\ X_{S_A^{(k-1)N}} = z \right]$$

$$\overset{\text{Satz 1.15}}{=} \sum_{z\in A} \underbrace{\mathbb{P}_z\left[S_A^{N} < S_{\{y\}} \right]}_{\leq 1-\varepsilon} \mathbb{P}_x\left[S_A^{(k-1)N} < S_{\{y\}},\ X_{S_A^{(k-1)N}} = z \right]$$

$$\leq (1-\varepsilon)\, \mathbb{P}_x\left[S_A^{(k-1)N} < S_{\{y\}} \right].$$

Daraus ergibt sich induktiv, daß

$$\mathbb{P}_x\left[S_A^{kN} < S_{\{y\}} \right] \leq (1-\varepsilon)^k \qquad \forall\, k\in\mathbb{N} \text{ und } x\in A.$$

Somit erhält man

$$\mathbb{P}_x\left[S_{\{y\}} = \infty \right] = \limsup_{k\to\infty} \underbrace{\mathbb{P}_x\left[S_A^{kN} < \infty,\ S_{\{y\}} = \infty \right]}_{\leq \mathbb{P}_x\left[S_A^{kN} < S_{\{y\}} \right]} \leq \limsup_{k\to\infty} (1-\varepsilon)^k = 0$$

Also,

$$\mathbb{P}_x\left[S_{\{y\}} < \infty \right] = 1$$

Angenommen y wäre transient. Dann folgt aus Satz 2.12, daß

$$\mathbb{P}_x\left[S_{\{y\}} < \infty \right] < 1 \qquad ↯$$

Folglich ist y rekurrent. Aus Satz 2.8 folgt dann aber, daß jeder Zustand $y\in E$ rekurrent ist. $\square$

Satz 2.16 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible (ν,P)-Markovkette mit Zustandsraum E.

a) Falls $\emptyset \neq A \subsetneq E$ und $h: E \to [0,\infty)$ existieren mit

$$(\mathcal{L}h)(x) \leq 0 \quad \forall x \in A^c \quad \text{und} \quad h(y) < \inf_{z\in A} h(z) \text{ für ein } y \in E \qquad (LT)$$

so gilt

$$P_y[S_A < \infty] \leq \frac{h(y)}{\inf_{z\in A} h(z)} < 1 .$$

Insbesondere ist jeder Zustand $y \in E$ transient.

b) Falls eine endliche Menge $\emptyset \neq A \subsetneq E$ und $h: E \to [0,\infty)$ existieren mit

$$(\mathcal{L}h)(x) \leq 0 \quad \forall x \in A^c \quad \text{und} \quad |\{x : h(x) \leq c\}| < \infty \quad \forall c \geq 0 \qquad (LR)$$

so gilt $P_x[S_A < \infty] = 1$ für alle $x \in E$. Insbesondere ist jeder Zustand $y \in E$ rekurrent.

Beweis: a) Offensichtlich gilt für die Stoppzeit $S_A \wedge n$, daß $E_x[S_A \wedge n] \leq n$ für alle $x \in E$ und $n \in \mathbb{N}$. Aus der Dynkin-Formel (Satz 2.14) angewendet auf $T = S_A \wedge n$ und $f = h \wedge m$ folgt zusammen mit dem Lemma von Fatou

$$h(y) = \liminf_{m\to\infty} h(y)\wedge m$$
$$\geq \liminf_{m\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}_y\left[h(X_{S_A\wedge n})\wedge m\right] \geq \mathbb{E}_y\left[h(X_{S_A})\mathbb{1}_{S_A<\infty}\right] \geq \inf_{z\in A} h(z)\, \mathbb{P}_y[S_A<\infty]$$

Also,

$$\mathbb{P}_y[S_A<\infty] \leq \frac{h(y)}{\inf_{z\in A} h(z)} < 1$$

Zusammen mit Lemma 2.15 a) folgt somit, daß jeder Zustand in E transient ist.

b) Zu zeigen: Für jedes $c\geq 0$ gilt $\mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}}<\infty] = 1 \quad \forall\, x\in\{h\leq c\}$

Aus der Irreduzibilität folgt zunächst einmal, daß für jedes $c\geq 0$

$$\mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}}=\infty] < 1 \qquad \forall\, x\in\{h\leq c\}$$

Folglich existiert zu jedem $x\in\{h\leq c\}$ ein $N_x\in\mathbb{N}$ und $\varepsilon_x>0$ so, daß

$$\mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}}>n] \leq 1-\varepsilon_x \qquad \forall\, n\geq N_x.$$

Setze $N := \max\{N_x : x\in\{h\leq c\}\}$ und $\varepsilon := \min\{\varepsilon_x : x\in\{h\leq c\}\}$. Da nach Voraussetzung die Menge $\{h\leq c\}$ endlich ist für jedes $c\geq 0$, folgt $N<\infty$, $\varepsilon>0$ und

$$\mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}}>n] \leq 1-\varepsilon \qquad \forall\, n\geq N \text{ und } x\in\{h\leq c\}.$$

Weiterhin gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > kN]$$

$$= \sum_{y \in \{h \le c\}} \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > kN \mid S_{\{h>c\}} > (k-1)N, X_{(k-1)N} = y]\, \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > (k-1)N, X_{(k-1)N} = y]$$

$$\overset{\text{Satz 1.10}}{=} \sum_{y \in \{h \le c\}} \underbrace{\mathbb{P}_y[S_{\{h>c\}} > N]}_{\le 1-\varepsilon}\, \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > (k-1)N, X_{(k-1)N} = y]$$

$$\le (1-\varepsilon)\, \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > (k-1)N]$$

Folglich ergibt sich induktiv, daß $\mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > kN] \le (1-\varepsilon)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \{h \le c\}$.

Somit erhält man

$$\mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} = \infty] = \limsup_{k \to \infty} \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > kN] \le \limsup_{k \to \infty} (1-\varepsilon)^k = 0 \qquad \forall x \in \{h \le c\}.$$

<u>Zu zeigen:</u> $\mathbb{P}_x[S_A < \infty] = 1 \quad \forall x \in A$

Für jedes $c \ge 0$ gilt für die Stoppzeit $S_A \wedge n \wedge S_{\{h>c\}}$, daß $E_x[S_A \wedge n \wedge S_{\{h>c\}}] \le n < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in E$. Mit der Dynkin-Formel (Satz 2.14) angewendet auf $T = S_A \wedge n \wedge S_{\{h>c\}}$ und $f = h \wedge m$ folgt zusammen mit dem Lemma von Fatou

$$h(x) = \liminf_{m\to\infty} h(x)\wedge m$$

$$\geq \liminf_{m\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}_x\left[h(X_{S_A\wedge n\wedge S_{\{h>c\}}})\wedge m\right] \geq \mathbb{E}_x\left[h(X_{S_A\wedge S_{\{h>c\}}})\right]$$

Daraus folgt

$$h(x) \geq \mathbb{E}_x\left[h(X_{S_{\{h>c\}}})\,\mathbb{1}_{S_{\{h>c\}}<\infty}\,\mathbb{1}_{S_A=\infty}\right] \geq c\,\mathbb{P}_x\left[S_{\{h>c\}}<\infty,\, S_A=\infty\right] = c\,\mathbb{P}_x[S_A=\infty]$$

Da dies für jedes $c\geq 0$ gilt, folgt schließlich

$$\mathbb{P}_x[S_A=\infty] \leq \limsup_{c\to\infty} \frac{h(x)}{c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}_x[S_A<\infty] = 1 \qquad \forall x\in E$$

Folglich ist nach Lemma 2.15 b) jeder Zustand $y\in E$ rekurrent. $\square$

Aufgabe 18: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible (ν,P)-Markovkette mit Zustandsraum E.

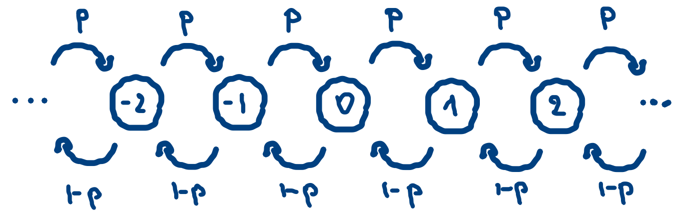
Falls eine endliche Menge $\emptyset\neq A\subseteq E$, ein $b\in\mathbb{R}$ und $h: E\to[0,\infty)$ existiert mit

$$(\mathcal{L}h)(x) \leq -1 + b\,\mathbb{1}_A(x) \qquad \forall x\in S \qquad \text{(LP)}$$

so gilt

$$\mathbb{E}_x[S_A] \leq h(x) + b\,\mathbb{1}_A(x) \qquad \forall x\in S$$

Beispiel 23: (einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf $E=\mathbb{Z}$ mit folgendem Übergangsgraphen



$p\in(0,1)$

Betrachte zunächst den Fall $p\neq 1/2$. Dann gilt für $h(x)=\left(\frac{1-p}{p}\right)^x$, $x\in E$:

$$(Lh)(x) = p\big(h(x+1)-h(x)\big) + (1-p)\big(h(x-1)-h(x)\big) = h(x)\big(1-2p+(2p-1)\big) = 0$$

für alle $x\in E$. Wähle nun $A=\{0\}$ und

$$y = \begin{cases} 1, & p>1/2 \\ -1, & p<1/2 \end{cases}$$

Dann gilt

$$(Lh)(x) = 0 \quad \forall x\in A^c \qquad \text{und} \qquad h(y) < h(0) = 1$$

Somit ist die Bedingung (LT) erfüllt. Da zudem $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzible ist, folgt aus Satz 2.16 a), daß jeder Zustand transient ist.

Im Falle $p = \frac{1}{2}$ betrachte die Funktion $h(x) = |x|$. Dann gilt

$$(Lh)(x) = \frac{1}{2}\left(|x+1| - |x|\right) + \frac{1}{2}\left(|x-1| - |x|\right) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Wähle nun $A = \{0\}$. Dann gilt

$$(Lh)(x) = 0 \quad \forall\, x \in A^c \quad \text{und} \quad |\{h \leq c\}| < \infty \quad \forall\, c \geq 0.$$

Somit ist die Bedingung (LR) erfüllt. Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zudem irreduzibel ist, ist folglich nach Satz 2.16 b) jeder Zustand rekurrent.

<u>Beispiel 24:</u> (einfache, symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf $E = \mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$ mit folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2d}, & \|y - x\| = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Betrachte nun die Funktion $h(0) = 1$ und $h(x) = \|x\|_2^{-2\alpha}$, $x \neq 0$. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{Z}^d$ mit $\|x\|_2 > 1$ und $e \in \mathbb{Z}^d$ mit $\|e\|_2 = 1$

$$h(x+e) - h(x) = h(x)\left(\left(\frac{\|x+e\|_2^2}{\|x\|_2^2}\right)^{-\alpha} - 1\right) = h(x)\left(\left(1 + \frac{2\langle x,e\rangle+1}{\|x\|_2^2}\right)^{-\alpha} - 1\right)$$

$$= h(x)\left(1 - \alpha\,\frac{2\langle x,e\rangle+1}{\|x\|_2^2} + 2\alpha(\alpha+1)\frac{\langle x,e\rangle^2}{\|x\|_2^4} + O(\|x\|_2^{-3}) - 1\right)$$

wobei die Taylorentwicklung der Funktion $f(z) = (1+z)^{-\alpha} = 1 - \alpha z + \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)z^2 + O(|z|^3)$ benutzt wurde. Da zudem gilt

$$\sum_{\|e\|_2=1} 1 = 2d, \qquad \sum_{\|e\|_2=1} \langle x,e\rangle = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{\|e\|_2=1} \langle x,e\rangle^2 = 2\|x\|_2^2$$

folgt

$$\sum_{\|e\|_2=1} \frac{1}{2d}\left(h(x+e) - h(x)\right) = \frac{1}{2d} h(x)\left(-2\alpha d\|x\|_2^{-2} + 4\alpha(\alpha+1)\|x\|_2^{-2} + O(\|x\|_2^{-3})\right)$$

$$= \frac{\alpha}{d}\|x\|_2^{-2\alpha-2}\left(2(\alpha+1) - d + O(\|x\|_2^{-1})\right)$$

Daraus folgt für $d \geq 3$, $\alpha \in (0, (d-2)/2)$ und $A := \{x : \|x\|_2 \leq r\}$ für ein hinreichend großes $r > 0$, daß

$$(Lh)(x) \leq 0 \quad \forall x \in A^c \qquad \text{und} \qquad h(y) < \inf_{z\in A} h(z) \text{ für ein } y \text{ mit } \|y\|_2 > 2r.$$

Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zudem irreduzibel ist, folgt aus Satz 2.16 a), daß die einfache, symmetrische Irrfahrt auf $E = \mathbb{Z}^d$ für jedes $d \geq 3$ transient ist.

Aufgabe 19: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine einfache, symmetrische Irrfahrt auf $E=\mathbb{Z}^2$. Zeige, mit Hilfe der Lyapunovfunktion $h(x)=\left(\ln(1+\|x\|_2^2)\right)^{\gamma}$, $\gamma\in(0,1)$, daß jeder Zustand $y\in E$ rekurrent ist.

Satz 2.17 (Chung-Fuchs) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible Irrfahrt auf $E=\mathbb{Z}^d$ mit $p(x,y)=\mu(y-x)$, $x,y\in E$, wobei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf E ist. Bezeichne mit φ die charakteristische Funktion von μ, d.h.

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle}\,\mu(dx) = \sum_{x\in E} e^{i\langle t,x\rangle} p(0,x) \quad , \quad t\in[-\pi,\pi)^d$$

Die Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist genau dann rekurrent, wenn

$$\lim_{\lambda\uparrow 1} \int_{[-\pi,\pi)^d} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\lambda\varphi(t)}\right) dt = \infty .$$

Bemerkung 18: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ mit Start in $x\in\mathbb{Z}^d$ und $p(x,y)=\mu(y-x)$, d.h.

$$X_n = x + \sum_{k=1}^{n} Z_k \qquad \text{mit} \quad (Z_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ u.i.v mit } \mathbb{P}[Z_1=y]=\mu(y).$$

a) $\quad \varphi(0)=1 \quad$ und $\quad |\varphi(t)| \le \mathbb{E}\left[\,|e^{i\langle t,Z_1\rangle}|\,\right]=1$

b) Es gilt

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} e^{i\langle t,x\rangle} p_n(0,x) = E_0\left[e^{i\langle t,X_n\rangle}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n e^{i\langle t,Z_k\rangle}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i\langle t,Z_1\rangle}\right]^n = \varphi(t)^n$$

Insbesondere folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$(2\pi)^{-d}\int_{[-\pi,\pi]^d} e^{-i\langle t,x\rangle}\varphi(t)^n\,dt = \lim_{r\to\infty}\sum_{\substack{z\in\mathbb{Z}^d\\ \|z\|<r}} p_n(0,z)\,\underbrace{(2\pi)^{-d}\int_{[-\pi,\pi]^d} e^{i\langle t,z-x\rangle}\,dt}_{=(2\pi)^d\,\mathbb{1}_{x=z}} = p_n(0,x)$$

<u>Beweis:</u> Für $\lambda\in(0,1)$ folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n p_n(0,0) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n(2\pi)^{-d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\varphi(t)^n\,dt$$

$$= (2\pi)^{-d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda\varphi(t))^n\,dt = (2\pi)^{-d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\frac{1}{1-\lambda\varphi(t)}\,dt$$

Da die linke Seite rein reell ist, folgt somit

$$R(\lambda) = (2\pi)^{-d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\lambda\varphi(t)}\right)dt$$

Da nun aber $G(0,0)=\lim_{\lambda\uparrow 1}R(\lambda)$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel ist, so folgt die Behauptung aus Satz 2.1 und Satz 2.8. $\square$

Beispiel 25: (Einfache, symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $E = \mathbb{Z}^d$ und Übergangsmatrix $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ mit

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & , \|x-y\| = 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\varphi(t) = \sum_{x\in E} e^{i\langle t,x\rangle} p(0,x) = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} \cos(t_i)$$

Da aber

$$\frac{s^2}{6} \le 1-\cos(s) \le \frac{s^2}{2} \qquad \forall s\in[-\pi,\pi)$$

so ist nach Satz 2.17 der Zustand $x=0$ und wegen der Irreduzibilität damit nach Satz 2.8 jeder Zustand genau dann rekurrent, wenn für jedes $\varepsilon>0$

$$\int_{\|t\|_2<\varepsilon} \frac{1}{\|t\|_2^2}\, dt = c_d \int_0^{\varepsilon} r^{d-1} r^{-2}\, dr = \infty \iff d\le 2$$

D.h. die einfache, symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ ist für $d\le 2$ rekurrent und für $d>2$ transient.

Beispiel 26: (Symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit 2. Moment) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible Markovkette auf $E=\mathbb{Z}$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten $p(x,y)=\mu(y-x)$, wobei das Wahrscheinlichkeitsmaß μ folgende Eigenschaften besitzt

$$\mu(x)=\mu(-x) \qquad \text{und} \qquad \sum_{x\in\mathbb{Z}} x^2\mu(x) =: c_1 < \infty$$

Dann gilt

$$\varphi(t) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} e^{itx}\mu(x) = \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}}\left(e^{itx}\mu(x)+e^{-itx}\mu(-x)\right) \overset{\mu(x)=\mu(-x)}{=} \sum_{x\in\mathbb{Z}} \cos(tx)\mu(x)$$

Aus der Taylorentwicklung der Kosinusfunktion folgt $\cos(s)\geq 1-\frac{1}{2}s^2$. Also

$$\varphi(t) \geq \sum_{x\in\mathbb{Z}}\left(1-\frac{t^2}{2}x^2\right)\mu(x) = 1-\frac{c_1}{2}t^2$$

Damit erhält man

$$\lim_{\lambda\uparrow 1}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}\left(1-\lambda\varphi(t)\right)^{-1}dt \overset{\text{Fatou}}{\geq} \int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\varphi(t)\right)^{-1}dt \geq 2\int_0^{\pi}\frac{2}{c_1t^2}\,dt = \infty$$

Somit folgt aus dem Satz von Chung-Fuchs (Satz 2.17), daß die Irrfahrt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekurrent ist.

Aufgabe 20: Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine irreduzible Markovkette mit Zustandsraum $E = \mathbb{Z}$ und Übergangswahrscheinlichkeiten $p(x,y) = \mu(y-x)$, wobei das Wahrscheinlichkeitsmaß μ folgendende Eigenschaften besitzt:

$$\mu(x) = \mu(-x) \quad \forall x \in E \quad \text{und} \quad 0 < \lim_{|x| \to \infty} |x|^{1+\alpha} \mu(x) =: c_1 < \infty$$

für ein $\alpha > 0$.

a) Zeige, daß für $\alpha \in (0,2)$ gilt

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - \varphi(t)}{|t|^\alpha} = c_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos x}{|x|^{1+\alpha}} \, dx < \infty$$

b) Schließe mit Hilfe von Aufgabenteil a) und Satz 2.17, daß für

$0 < \alpha < 1$ alle Zustände transient sind

$1 \le \alpha < 2$ alle Zustände rekurrent sind.