2.2. Klassifikation von Markovketten

Definition (erreichbar, kommunizieren, wesentlich)

a) Ein Zustand $y \in E$ heißt erreichbar von $x \in E$ ($x \to y$), falls ein $n \in \mathbb{N}_0$ existiert mit

$$p_n(x,y) > 0$$

b) Die Zustände $x, y \in E$ kommunizieren ($x \leftrightarrow y$), falls $x \to y$ und $y \to x$.

c) Eine nichtleere Teilmenge $\emptyset \neq K \subseteq E$ heißt kommunizierende Klasse, falls

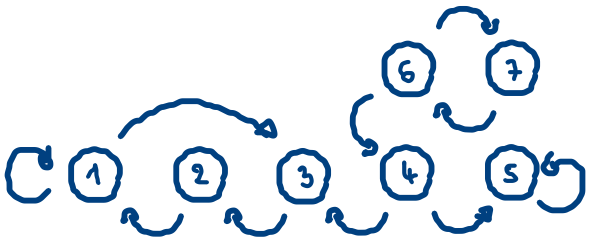
(i) $x \leftrightarrow y$ für alle $x, y \in K$

(ii) aus $x \in K$ und $y \in E$ mit $x \to y$ folgt $y \in K$ (Abgeschlossenheit)

d) Ist $x \in E$ Element einer kommunizierenden Klasse, so heißt x wesentlich (sonst unwesentlich).

Bemerkung 14: Jedes $x \in E$ liegt höchstens in einer kommunizierenden Klasse ($\{y \in E : x \to y\}$)

Beispiel 23:



kommunizierende Klassen: $\{1,2,3\}$, $\{5\}$

unwesentliche Zustände: $\{4,6,7\}$

Aufgabe 15: Sei $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ eine stochastische Matrix auf E.

a) Sei $\emptyset \neq K \subsetneq E$ mit $x \leftrightarrow y$ für alle $x,y \in K$. Zeige:

K ist eine kommunizierende Klasse $\Leftrightarrow$ $P_K := (p(x,y))_{x,y\in K}$ ist eine stochastische Matrix

b) Zeige, daß $x \in E$ genau dann ein wesentlicher Zustand ist, wenn

$$\{ y \in E : x \leftrightarrow y \} = \{ y \in E : x \to y \}$$

Satz 2.7 Die Relation $\leftrightarrow$ ist eine Äquivalenzrelation. Auf der Menge der wesentlichen Zustände sind die zugehörigen Äquivalenzklassen die kommunizierenden Klassen.

Beweis: Offensichtlich ist die Relation $\leftrightarrow$ symmetrisch und reflexiv. Seien nun $x,y,z \in E$ mit $x \leftrightarrow y$ und $y \leftrightarrow z$. Dann gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $p_{n_1}(x,y) > 0$ und $p_{n_2}(y,z) > 0$. Aus der Chapman-Kolmogorov-Gleichung folgt

$$p_{n_1+n_2}(x,z) \geq p_{n_1}(x,y)\, p_{n_2}(y,z) > 0 \quad \Rightarrow \quad x \to z$$

Analog ergibt sich $z \to x$. Somit ist $\leftrightarrow$ auch transitiv. Die zweite Aussage folgt direkt aus der Definition der kommunizierenden Klasse. $\square$

Satz 2.8 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν,P)-Markovkette mit Zustandsraum E. Wenn $x\in E$ rekurrent ist und $x\to y$, so gilt $y\to x$ und y ist rekurrent.

Beweis: Zu zeigen: $y\to x$

Angenommen $y\not\to x$, d.h. $p_n(y,x)=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Wähle $n_0\in\mathbb{N}_0$ so, daß

$$p_{n_0}(x,y)>0.$$

Da x rekurrent ist, gilt

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{\text{Satz 2.1}}{=} \mathbb{P}_x[X_n=x \text{ für endlich viele } n\in\mathbb{N}_0]\\
&\geq \mathbb{P}_x[X_{n_0}=y,\ X_{n_0+1}\neq x,\ X_{n_0+2}\neq x,\dots]\\
&= \mathbb{P}_x[X_{n_0}=y]\ \mathbb{P}_x[X_{n_0}=y,\ X_{n_0+1}\neq x,\ X_{n_0+2}\neq x,\dots \mid X_{n_0}=y]\\
&\overset{\text{Satz 1.6}}{=} p_{n_0}(x,y)\ \mathbb{P}_y[X_1\neq x,\ X_2\neq x,\ \dots]
\end{aligned}
$$

Setze $A_n=\{X_1\neq x,\dots,X_n\neq x\}$. Dann gilt $A_n\downarrow\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k=\{X_1\neq x,X_2\neq x,\dots\}$ und

$$\mathbb{P}_y[X_1\neq x,\dots,X_n\neq x]=1-\mathbb{P}_y[\{X_1\neq x,\dots,X_n\neq x\}^c]\geq 1-\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\mathbb{P}_y[X_k=x]}_{=p_k(y,x)=0}=1$$

Damit erhält man aus der Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}_y$

$$\mathbb{P}_y[X_1 \neq x, X_2 \neq x, \dots] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_y[X_1 \neq x, \dots, X_n \neq x] = 1$$

Also,

$$0 \geq p_{n_0}(x,y)\, \mathbb{P}_y[X_1 \neq x, X_2 \neq x, \dots] = p_{n_0}(x,y) > 0 \qquad \text{↯}$$

Folglich gilt $y \to x$.

<u>Zu zeigen</u>: y ist rekurrent

Seien nun $k, l \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $p_k(x,y) > 0$ und $p_l(y,x) > 0$. Dann ergibt sich aus der Chapman-Kolmogorov-Gleichung

$$p_{k+l+n}(y,y) \geq p_l(y,x)\, p_n(x,x)\, p_k(x,y) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Also,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{k+l+n}(y,y) \geq \underbrace{p_l(y,x)}_{>0}\, \underbrace{p_k(x,y)}_{>0} \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,x) \overset{\text{Satz 2.1}}{=} \infty,$$

da x rekurrent ist.

$\square$

Korollar 2.9 Rekurrente Zustände sind wesentlich.

Beweis: Sei $x \in E$ rekurrent, und setze $K(x) := \{ y \in E : x \to y \}$. Nach Satz 2.8 gilt aber $y \to x$ für alle $y \in K(x)$. Folglich ist $K(x)$ eine kommunizierende Klasse, d.h. x ist wesentlich.

Bemerkung 15: Unwesentliche Zustände sind transient.

Satz 2.10 Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E und $x, y \in E$.

Wenn $x \leftrightarrow y$, so gilt

a) x und y haben die selbe Periode, d.h. $d(x) = d(y)$

b) x ist transient $\Leftrightarrow$ y ist transient

c) x ist nullrekurrent $\Leftrightarrow$ y ist nullrekurrent

Bemerkung 16: Ist $x \in E$ positiv rekurrent und gilt $x \to y$, so ist auch y positiv rekurrent.

<u>Beweis:</u> a) <u>Zu zeigen:</u> $x \leftrightarrow y \Rightarrow d(x) = d(y)$

Bezeichne mit $D(x) := \{ n \in \mathbb{N}_0 : p_n(x,x) > 0 \}$, $x \in E$. Seien nun $x, y \in E$ mit $x \leftrightarrow y$.

Wähle $m, n \in \mathbb{N}_0$ so, daß $p_m(x,y) > 0$ und $p_n(y,x) > 0$. Dann gilt für jedes $k \in D(y)$ aufgrund der Chapman-Kolmogorov-Gleichung

$$p_{m+k+n}(x,x) \geq p_m(x,y)\, p_k(y,y)\, p_n(y,x) > 0$$

Folglich ist $m+k+n \in D(x)$. Ist nun d ein Teiler von $D(x)$, so gilt

$$d \mid \{ m+k+n : k \in D(y) \}$$

Da aber $m+n \in D(x)$ und somit $d \mid (m+n)$, folgt $d \mid D(y)$. Also,

$$d(x) = ggT(D(x)) \leq ggT(D(y)) = d(y)$$

Durch Vertauschen der Rollen von x und y folgt analog $d(y) \leq d(x)$. Also $d(x) = d(y)$.

b) "$\Rightarrow$" Sei x transient. Da $x \leftrightarrow y$, existieren $k, l \in \mathbb{N}$ so, daß $p_k(x,y) > 0$ und $p_l(y,x) > 0$. Dann folgt aus der Chapman-Kolmogorov-Gleichung

$$p_{k+l+n}(x,x) \geq p_k(x,y)\, p_n(y,y)\, p_l(y,x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt aus Satz 2.1

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} p_{k+\ell+n}(x,x) \geq \underbrace{p_k(x,y)}_{>0} \underbrace{p_\ell(y,x)}_{>0} \sum_{n=1}^{\infty} p_n(y,y) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n(y,y) < \infty$$

Also ist y transient.

"$\Leftarrow$" Analog.

c) "$\Rightarrow$" Sei x nullrekurrent. Da $x \leftrightarrow y$ existieren somit $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit

$$p_k(x,y) > 0 \quad \text{und} \quad p_\ell(y,x) > 0$$

Wiederum folgt aus der Chapman-Kolmogorov-Gleichung

$$p_{k+\ell+n}(x,x) \geq p_k(x,y)\, p_n(y,y)\, p_\ell(y,x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dann folgt aus Satz 2.3

$$0 = \lim_{n\to\infty} p_{k+\ell+n}(x,x) \geq \limsup_{n\to\infty} \underbrace{p_k(x,y)}_{>0} \underbrace{p_\ell(y,x)}_{>0} p_n(y,y) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} p_n(y,y) = 0$$

Folglich ist y nach Satz 2.3 nullrekurrent.

"$\Leftarrow$" Analog.

$\square$

Definition (irreduzibel)

Eine stochastische Matrix P auf E heißt irreduzibel, falls E nur aus einer kommunizierenden Klasse besteht. Eine (ν,P)-Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt irreduzibel, falls P irreduzibel ist.

Satz 2.11 Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible (ν,P)-Markovkette auf einem endlichen Zustandsraum E, so ist $x\in E$ positiv rekurrent.

Beweis: Zunächst einmal gilt für jedes $x\in E$

$$\sum_{y\in E} G(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{y\in E} p_n(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$$

Da E endlich ist, gibt es folglich ein $y\in E$ mit $G(x,y)=\infty$. Da E aufgrund der Irreduzibilität nur aus einer kommunizierenden Klasse besteht, ist insbesondere $y\to x$. Folglich existiert ein $m\in\mathbb{N}$ mit $p_m(x,y)>0$. Aus der Chapman-Kolmogorov-Gleichung folgt zudem $p_{m+n}(x,x)\geq p_n(x,y)\,p_m(y,x)$. Also,

$$G(x,x) \geq \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,y)\,p_m(y,x) = \underbrace{p_m(y,x)}_{>0}\,G(x,y) = \infty$$

Somit ist x nach Satz 2.1 rekurrent. Aus Satz 2.8 folgt dann aber, daß jeder Zustand in E rekurrent ist. Angenommen $x \in E$ wäre nullrekurrent. Dann folgt aus Satz 2.10, daß jeder Zustand nullrekurrent ist. Aber dann folgt aus Korollar 2.4

$$1 = \lim_{n\to\infty} \overset{|E|<\infty}{\sum_{y\in E}} p_n(x,y) = 0 \quad ⚡ \qquad \Rightarrow \quad \text{alle Zustände in } E \text{ sind positiv rekurrent}$$

$\square$

<u>Satz 2.12</u> Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible (ν,P)-Markovkette mit Zustandsraum E. Dann gilt

a) $y\in E$ ist rekurrent $\Rightarrow$ $\mathbb{P}_x[S_{\{y\}}<\infty] = 1 \quad \forall x,y\in E$

b) $y\in E$ ist transient $\Rightarrow$ $\mathbb{P}_x[S_{\{y\}}<\infty] < 1 \quad \forall x,y\in E$

<u>Beweis:</u> Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzible ist, folgt $x \leftrightarrow y$ für alle $x,y\in E$. Insbesondere sind nach Satz 2.8 und 2.10 alle Zustände entweder rekurrent oder transient, d.h.

a) $\mathbb{P}_y[S_{\{y\}}<\infty] = 1 \quad \forall y\in E$ b) $\mathbb{P}_y[S_{\{y\}}<\infty] < 1 \quad \forall y\in E$

Sei nun $x,y\in E$ mit $x\neq y$. Dann existiert wegen $x\leftrightarrow y$ ein $n\in\mathbb{N}$ so, daß

$$n = \min\{k\in\mathbb{N} : p_k(y,x)>0\}.$$

Dann gilt für jedes $N>n$

$$\mathbb{P}_y[S_{\{y\}} \le N, X_n = x]$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} = k, X_n = x]$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} = k]\, \mathbb{P}_y[X_n = x \mid X_{S_{\{y\}}} = y, S_{\{y\}} = k] + \sum_{k=n+1}^{N} \mathbb{P}_y[X_n = x]\, \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} = k \mid X_n = x]$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} = k]\, \mathbb{P}_y[X_{n-k} = x] + \sum_{k=n+1}^{N} \mathbb{P}_y[X_n = x]\, \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k-n],$$

wobei im letzten Schritt sowohl die Markoveigenschaft als auch die starke Markoveigenschaft benutzt wurde. Zudem gilt nach Wahl von n, daß

$$\mathbb{P}_y[X_{n-k} = x] = 0 \qquad \forall \quad k \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Daraus folgt

$$\mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < \infty, X_n = x] = \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} \le N, X_n = x] = p_n(y,x) \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k-n] = p_n(y,x)\, \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty]$$

a) Ist nun $\mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < \infty] = 1$, so folgt

$$p_n(y,x) = \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < \infty, X_n = x] = p_n(y,x)\, \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] = 1$$

b) Ist nun $\mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < \infty] < 1$, so gilt

$$p_n(y,x) > \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < \infty, X_n = x] = p_n(y,x)\, \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] < 1$$

$\square$

Definition (Rekurrenz / Transienz einer Markovkette)

Eine irreduzible (ν, P)-Markovkette heißt rekurrent / transient, wenn ein Zustand rekurrent / transient ist.

Aufgabe 16: Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $E = \mathbb{N}_0$, $a \in [0,1]$ und $P = (p(x,y))_{x,y \in E}$ eine stochastische Matrix mit

$$p(x,y) = \begin{cases} \mu(y) & , \quad x = 0 \\ 1-a & , \quad y = x-1 \\ a & , \quad y = x \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimme für die Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Übergangsmatrix P die kommunizierenden Klassen und klassifiziere die Zustände.

Aufgabe 17: (Murphy's Gesetz) Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine irreduzible, aperiodische, rekurrente Markovkette auf einem höchstens abzählbaren Zustandsraum E mit Übergangsmatrix P. Sei $\vec{x} := (x_1, x_2, \dots, x_m)$ eine beliebige endliche Folge von Zuständen aus E mit

$$p(x_1,x_2) \cdot \ldots \cdot p(x_{m-1},x_m) > 0$$

Zeige, daß mit Wahrscheinlichkeit 1 die Folge $\vec{x}$ in endlicher Zeit auftritt.