2. Strukturreigenschaften der Übergangsmatrix

Im folgenden sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit höchstens abzählbarem Zustandsraum E. Bezeichne wieder mit $P^n = (p_n(x,y))_{x,y\in E}$ das n-fache Matrixprodukt (P^0 = Einheitsmatrix auf E), $n\in\mathbb{N}_0$.

2.1 Klassifikation von Zuständen

Definition (absorbierender, rekurrenter, transienter Zustand)

Ein Zustand $x\in E$ heißt

(i) absorbierend, falls $p(x,x) = 1$

(ii) rekurrent, falls $\mathbb{P}_x[\,S_{\{x\}} < \infty\,] = 1$

(iii) transient, falls $\mathbb{P}_x[\,S_{\{x\}} < \infty\,] < 1$

wobei $S_{\{x\}} := \inf\{\, n\in\mathbb{N} : X_n = x \,\}$ die Treffzeit ist.

Bemerkung 12: x ist absorbierend $\Rightarrow$ x ist rekurrent

Frage: Wie kann man einen rekurrenten / transienten Zustand alternativ charakterisieren?

Satz 2.1 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν,P)-Markovkette mit Zustandsraum E. Dann gilt

a) x ist rekurrent $\iff \mathbb{P}_x[X_n = x \text{ u.o.}] = 1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,x) = \infty$

b) x ist transient $\iff \mathbb{P}_x[X_n = x \text{ u.o.}] = 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,x) < \infty$

Insbesondere ist jeder Zustand $x \in E$ entweder rekurrent oder transient.

Beweis: Für $x\in E$ sei $V_x := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X_n = x}$ die Gesamtzahl der Besuche von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in x. Insbesondere ist $\mathbb{E}_x[V_x] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,x)$.

a) Zu zeigen: x rekurrent $\Rightarrow \mathbb{P}_x[X_n = x \text{ u.o.}] = 1$

Sei also x rekurrent, d.h. $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] = 1$. Dann folgt aus Korollar 1.16:

$$\mathbb{P}_x[X_n = x \text{ u.o.}] = \mathbb{P}_x[V_x = \infty] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}_x[V_x > k] = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty]}_{=1}{}^{k} = 1$$

Zu zeigen: $\mathbb{P}_x[X_n = x \text{ u.o.}] = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,x) = \infty$

Es gilt nun aber

$$\mathbb{P}_x[V_x = \infty] = \mathbb{P}_x[X_n = x \text{ u.o.}] = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}_x[V_x] = \infty$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,x) = \mathbb{E}_x[V_x] - 1 = \infty$$

<u>Zu zeigen:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,x) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] = 1$

Angenommen $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] < 1$. Dann folgt aus Korollar 1.16

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,x) = \mathbb{E}_x[V_x] - 1 \leq \underbrace{\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} = \infty]}_{>0}^{-1} < \infty \quad \lightning$$

Also ist $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] = 1$.

b) <u>Zu zeigen:</u> x transient $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,x) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}_x[X_n = x \text{ u.o.}] = 0$

Sei also x transient, d.h. $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] < 1$. Dann folgt aus Korollar 1.16

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,x) = \mathbb{E}_x[V_x] - 1 \leq \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} = \infty]^{-1} < \infty$$

Insbesondere impliziert $\mathbb{E}_x[V_x] < \infty$, daß $\mathbb{P}_x[X_n = x \text{ u.o.}] = 0$

<u>Zu zeigen:</u> $\mathbb{P}_x[X_n = x \text{ u.o.}] = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] < 1$

Angenommen $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] = 1$. Dann folgt aus Korollar 1.16

$$\mathbb{P}_x[X_n = x \text{ u.o.}] = \mathbb{P}_x[V_x = \infty] = \lim_{k \to \infty} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty]^k = 1 \quad \lightning$$

Also gilt $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] < 1$.

$\square$

Definition (Greenfunktion von X)

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν,P)-Markovkette auf E und $V_x := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X_n = x}$, $x\in E$.

Dann heißt

$$G(x,y) = \mathbb{E}_x[V_y] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,y) \in [0,\infty]$$

die Greenfunktion von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Korollar 2.2 Ist $y\in E$ ein transienter Zustand, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x,y) = 0 \qquad \forall\, x\in E.$$

Beweis: Sei $y\in E$ ein transienter Zustand. Dann folgt aus Satz 2.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(y,y) < \infty \implies \lim_{n\to\infty} p_n(y,y) = 0$$

Sei also nun $x\in E$, $x\neq y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} p_n(x,y) &= \mathbb{P}_x[X_n = y] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x[X_n = y, S_{\{y\}} = k] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k]\, \mathbb{P}_x[X_n = y \mid X_k = y, S_{\{y\}} = k] \end{aligned}$$

Somit folgt aus Satz 1.10

$$p_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}}=k]\, \mathbb{P}_y[X_{n-k}=y] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}}=k]\, p_{n-k}(y,y)$$

Also,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}}=k] \sum_{n=k}^{\infty} p_{n-k}(y,y) = \mathbb{P}_x[S_{\{y\}}<\infty]\Big(1+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} p_n(y,y)}_{<\infty}\Big) < \infty$$

Damit erhält man $\lim_{n\to\infty} p_n(x,y) = 0$ für alle $x \neq y$.

$\square$

<u>Aufgabe 13</u>: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν,P)-Markovkette mit Zustandsraum E. Setze

$$p(x,y)[s] := \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,y)\, s^n \quad \text{und} \quad q(x,y)[s] := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}}=n]\, s^n, \quad s\in[0,1).$$

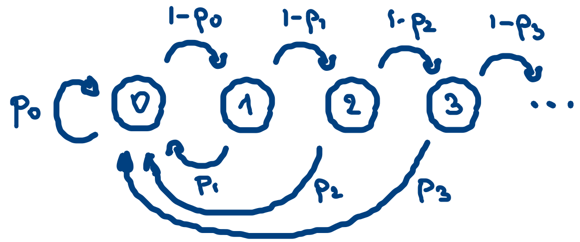
Zeige, daß

a) $p(x,y)[s] = \mathbb{1}_x(y) + q(x,y)[s]\, p(y,y)[s]$, $s\in[0,1)$

b) $y\in E$ ist transient impliziert $\lim_{n\to\infty} p_n(x,y) = 0$ für alle $x\in E$

(ohne Benutzung von Satz 2.1)

Beispiel 18: (Kartenhausprozeß) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $E=\mathbb{N}_0$, dessen Übergangsmatrix $P=(p(x,y))_{x,y\in E}$ durch folgenden Übergangsgraphen beschrieben wird



$p_i\in(0,1)\quad\forall i\in\mathbb{N}_0$

Frage: Unter welchen Bedingungen an $(p_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ ist der Zustand $x=0$ rekurrent?

Da es für jedes $n\in\mathbb{N}$ genau einen Pfad gibt, der bei Start in $x=0$ nach genau n-Schritten wieder die 0 trifft (nämlich $(x_0,x_1,\dots,x_n)=(0,1,2,\dots,n-1,0)$) folgt

$$\mathbb{P}_0[S_{\{0\}}=n] = (1-p_0)\cdot\ldots\cdot(1-p_{n-2})\,p_{n-1}, \quad n\in\mathbb{N}$$

Setze nun $u_0:=1$ und $u_n=(1-p_0)\cdot\ldots\cdot(1-p_{n-1})$, $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}_0[S_{\{0\}}=n] = u_{n-1}-u_n$$

Daraus folgt

$$\mathbb{P}_0[S_{\{0\}}<\infty] = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{P}_0[S_{\{0\}}=n] = \lim_{N\to\infty}(1-u_N) = 1-\lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N-1}(1-p_n)$$

Beh.: Falls $p_i \in (0,1)$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ so gilt

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N} (1-p_n) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = \infty$$

"$\Leftarrow$" Da $e^{-x} \geq 1-x$ für alle $x \geq 0$, folgt

$$0 \leq \lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N} (1-p_n) \leq \lim_{N\to\infty} \exp\Big(-\sum_{n=0}^{N} p_n\Big) \overset{\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \infty}{=} 0$$

"$\Rightarrow$" Zu zeigen: Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ gilt $\prod_{n=m}^{m+N} (1-p_n) \geq 1 - \sum_{n=m}^{m+N} p_n, \quad \forall N \in \mathbb{N}_0$

$\boxed{\text{IA}}$ $N=0$: ✓

$\boxed{\text{IS}}$ $N \to N+1$: Es gilt nun aber

$$\prod_{n=m}^{m+N+1} (1-p_n) \overset{\boxed{\text{IV}}}{\geq} \Big(1 - \sum_{n=m}^{m+N} p_n\Big)(1-p_{m+N+1}) = 1 - p_{m+N+1} - \underbrace{(1-p_{m+N+1})}_{<1} \sum_{n=m}^{m+N} p_n \geq 1 - \sum_{n=m}^{m+N+1} p_n$$

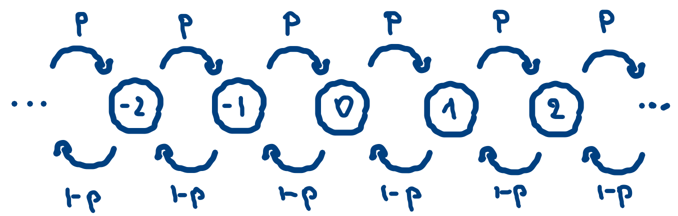
Angenommen $\sum_{n=0}^{\infty} p_n < \infty$. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ so, daß $0 < \sum_{n=m}^{\infty} p_n < 1$.

Daraus folgt

$$0 = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N} (1-p_n) = \prod_{n=0}^{m-1} (1-p_n) \lim_{N\to\infty} \prod_{n=m}^{N} (1-p_n) \geq \prod_{n=0}^{m-1} (1-p_n)\Big(1 - \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} p_n}_{<1}\Big) > 0 \quad ↯$$

Folglich ist $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \infty$. $\square$

Beispiel 19: (einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf $E=\mathbb{Z}$ mit folgendem Übergangsgraphen:



$p\in(0,1)$

Dann gilt $p_{2n+1}(0,0)=0$ für jedes $n\in\mathbb{N}_0$ und $p_{2n}(0,0)=\binom{2n}{n}p^n(1-p)^n$ für jedes $n\in\mathbb{N}$. Aus der Stirlingformel

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \qquad \left(a_n\sim b_n :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1\right)$$

folgt dann

$$p_{2n}(0,0) = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\,p^n(1-p)^n \sim \frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n}\,\frac{(2n)^{2n}}{n^{2n}}\,p^n(1-p)^n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\,(4p(1-p))^n$$

1. Fall: $p=\frac{1}{2} \Rightarrow p_{2n}(0,0)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \Rightarrow \exists\, n_0\in\mathbb{N}: p_{2n}(0,0)\geq\frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \forall n\geq n_0$

Also,

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_n(0,0) \geq \sum_{n=n_0}^{\infty}p_{2n}(0,0) \geq \frac{1}{2}\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$$

Aus Satz 2.1 folgt somit, daß $x=0$ rekurrent ist.

2. Fall: $p \neq \frac{1}{2} \Rightarrow 4p(1-p) =: r < 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: p_{2n}(0,0) \leq r^n \quad \forall n \geq n_0$

Also,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(0,0) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n}(0,0) \leq n_0 + \sum_{n=n_0}^{\infty} r^n < \infty$$

Aus Satz 2.1. folgt somit, daß $x=0$ transient ist.

Beispiel 20: (einfache, symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^2$) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf $E = \mathbb{Z}^2$ mit $p(x,y) = \frac{1}{4} \mathbb{1}_{\|x-y\|=1}$. Zunächst einmal ist $p_{2n+1}(0,0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Um in $2n$ Schritten nach $x=0$ zurückzukehren muß $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleich oft (k-mal) nach rechts bzw. links und gleich oft ($(n-k)$-mal) nach oben bzw. unten gelaufen sein. Daraus folgt

$$p_{2n}(0,0) = 4^{-2n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} = 4^{-2n} \binom{2n}{n} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}_{=\binom{2n}{n}} = \Bigg(\underbrace{\binom{2n}{n} 2^{-n}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}}\Bigg)^2 \sim \frac{1}{\pi n}$$

Also existiert wiederum ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $p_{2n}(0,0) \geq \frac{1}{4n}$ für alle $n \geq n_0$. Daraus folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(0,0) \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} p_{2n}(0,0) \geq \frac{1}{4} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow x=0 \text{ ist rekurrent}$$

Definition (positiv und nullrekurrent)

Ein rekurrenter Zustand $x \in E$ heißt

(i) positiv rekurrent, falls $\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}] < \infty$,

(ii) nullrekurrent, falls $\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}] = \infty$.

Satz 2.3 Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E. Ein rekurrenter Zustand $x \in E$ ist genau dann nullrekurrent, wenn $\lim_{n \to \infty} p_n(x,x) = 0$.

Korollar 2.4 Ist $y \in E$ ein nullrekurrenter Zustand, dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} p_n(x,y) = 0 \qquad \forall\, x \in E.$$

Beweis: Sei $y \in E$ nullrekurrent. Dann folgt aus Satz 2.3, daß $\lim_{n \to \infty} p_n(y,y) = 0$. Zudem ist

$$p_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k]\, p_{n-k}(y,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k]\, \mathbb{1}_{k \le n}\, p_{n-k}(y,y).$$

Setze $f_n(k) := \mathbb{1}_{k \le n}\, p_{n-k}(y,y)$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f_n(k) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$ und $\|f_n\|_\infty \le 1$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Also folgt die Behauptung aus dem Satz von Lebesgue.

$\square$

Definition (Periode)

Für jedes $x \in E$ heißt $d(x) := ggT\{n \in \mathbb{N}_0 : p_n(x,x) > 0\}$ die Periode des Zustandes x.

Ist $d(x) = 1$, so heißt der Zustand x aperiodisch.

Bemerkung 13: Sei $D \subseteq \mathbb{Z}$. Dann ist $d \in \mathbb{N}$ ein gemeinsamer Teiler von D

(Schreibweise: $d \mid D$), falls $\frac{x}{d} \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in D$. Ist $D = \{0\}$, so

gilt $d \mid D$ für alle $d \in \mathbb{N}$, also $ggT(D) = \infty$. Falls $D \neq \{0\}$, so gilt

$$d \mid D \quad \Rightarrow \quad d \leq \min\{|x| : x \in D \setminus \{0\}\}$$

Insbesondere ist

$$ggT(D) = \min\{|x| : x \in D \setminus \{0\}\} \quad \Leftrightarrow \quad \{ggT(D), -ggT(D)\} \cap D \neq \emptyset$$

Beispiel 21: Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine einfache Irrfahrt auf dem Torus $E = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, $N \geq 2$.

Dann ist

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } N \text{ ungerade} \\ 2, & \text{falls } N \text{ gerade} \end{cases} \qquad x \in E$$

Satz 2.5 Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{Z}$ mit $D \neq \{0\}$.

a) Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ und $d_1, \ldots, d_k \in D$ mit

$$ggT(D) = \sum_{i=1}^{k} a_i d_i$$

b) Falls zusätzlich $D \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $d_1, d_2 \in D \Rightarrow d_1 + d_2 \in D$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, daß

$$\{ n\, ggT(D) : n \geq N \} = \{ d \in D : d \geq N\, ggT(D) \}$$

Beweis: a) Sei $\hat{D}$ die kleinste Teilmenge von $\mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, daß

$$D \subseteq \hat{D} \quad \text{und} \quad \forall\, d_1, d_2 \in \hat{D} \Rightarrow d_1 \pm d_2 \in \hat{D}$$

Betrachte nun die Menge

$$\mathcal{D} := \{ \hat{d} \in \hat{D} : \exists\, k \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z},\ d_1, \ldots, d_k \in D \text{ s.d. } \hat{d} = \sum_{i=1}^{k} a_i d_i \} \subseteq \hat{D}$$

Zu zeigen: $\hat{D} = \mathcal{D}$

Zunächst einmal gilt $D \subseteq \mathcal{D}$. Betrachte nun $x, y \in \mathcal{D}$. Dann gilt $x \pm y \in \mathcal{D}$. Da aber $\hat{D}$ die kleinste Teilmenge ist, die D enthält und abgeschlossen bzgl. Addition / Subtraktion ist, folgt $\hat{D} \subseteq \mathcal{D}$. Also $\hat{D} = \mathcal{D}$.

Zu zeigen: $\operatorname{ggT}(D) = \operatorname{ggT}(\hat{D})$

Da $\operatorname{ggT}(D) \mid \sum_{i=1}^{k} a_i d_i$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$, $d_1, \dots, d_k \in D$ folgt $\operatorname{ggT}(D) \mid \hat{D}$. Also

$$\operatorname{ggT}(D) \leq \operatorname{ggT}(\hat{D})$$

Andererseits ist $D \subseteq \hat{D}$, weshalb $\operatorname{ggT}(\hat{D}) \mid D$. Also,

$$\operatorname{ggT}(\hat{D}) \leq \operatorname{ggT}(D)$$

und somit gilt $\operatorname{ggT}(D) = \operatorname{ggT}(\hat{D})$.

Zu zeigen: $\operatorname{ggT}(\hat{D}) \in \hat{D}$

Setze $m := \min\{x \in \mathbb{N} : x \in \hat{D}\}$. Aufgrund von Bemerkung 13 gilt $\operatorname{ggT}(\hat{D}) \leq m$.

Durch Anwendung des euklidischen Algorithmus ergibt sich für jedes $\hat{d} \in \hat{D}$, daß

$$\hat{d} = a \cdot m + r \qquad \text{für} \quad a \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad r \in \{0, \dots, m-1\}.$$

Also,

$$r = \overbrace{\hat{d}}^{\in \hat{D}} - \overbrace{a \cdot m}^{\in \hat{D}} \in \hat{D}$$

Angenommen $r \neq 0$, so ist $r < m$ ↯. Also ist $m \mid \hat{D}$ und folglich $m \leq \operatorname{ggT}(\hat{D})$. Somit gilt $m = \operatorname{ggT}(\hat{D})$ und $\operatorname{ggT}(\hat{D}) \in \hat{D}$.

b) Sei zusätzlich angenommen, daß $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{N}_0$ und $d_1, d_2 \in \mathcal{D} \Rightarrow d_1 + d_2 \in \mathcal{D}$.

Zu zeigen: $\exists N \in \mathbb{N} : \{ n \operatorname{ggT}(\mathcal{D}) : n \geq N \} \subseteq \mathcal{D}$

Da $\mathcal{D}$ abgeschlossen unter Addition ist, folgt $\hat{\mathcal{D}} = \{ d_2 - d_1 : d_1, d_2 \in \mathcal{D} \cup \{0\} \}$. Da

$$\operatorname{ggT}(\mathcal{D}) = \operatorname{ggT}(\hat{\mathcal{D}}) = \min \{ x \in \mathbb{N} : x \in \hat{\mathcal{D}} \} \qquad \text{(nach Beweisteil a))}$$

gibt es somit $d_1 \in \mathcal{D} \cup \{0\}$ und $d_2 \in \mathcal{D}$, $d_2 > d_1$ so, daß

$$\operatorname{ggT}(\mathcal{D}) = d_2 - d_1$$

Falls $d_1 = 0$, so gilt

$$n \operatorname{ggT}(\mathcal{D}) = n d_2 \in \mathcal{D} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad N = 1$$

Falls $d_1 \neq 0$, so wähle ein $a \in \mathbb{N}$ mit $d_1 = a \operatorname{ggT}(\mathcal{D})$. Dann gilt für alle $m, r \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq r < m$

$$(a^2 + ma + r) \operatorname{ggT}(\mathcal{D}) = (a+m)\, a \operatorname{ggT}(\mathcal{D}) + r \operatorname{ggT}(\mathcal{D}) = (a+m) d_1 + r (d_2 - d_1)$$
$$= (a+m-r) d_1 + r d_2 \in \mathcal{D}$$

Wähle somit $N = a^2$. Dann gilt $\{ n \operatorname{ggT}(\mathcal{D}) : n \geq N \} \subseteq \mathcal{D}$.

$\square$

Korollar 2.6 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν,P)-Markovkette mit Zustandsraum E. Dann gilt für jedes $x\in E$

(a) $d(x)<\infty \implies \exists\, N(x)\in\mathbb{N}: \quad p_{nd(x)}(x,x)>0 \quad \forall\, n\geq N(x)$

(b) x ist aperiodisch $\iff \exists\, N(x)\in\mathbb{N}: \quad p_n(x,x)>0 \quad \forall\, n\geq N(x)$

Beweis: Für $x\in E$ sei $D(x):=\{n\in\mathbb{N}_0: p_n(x,x)>0\}$. Falls $D(x)\neq\{0\}$, so ergibt sich für alle $n_1,n_2\in D(x)$ aus der Chapman-Kolmogorov-Gleichung (Satz 1.6)

$$p_{n_1+n_2}(x,x) = \sum_{z\in E} p_{n_1}(x,z)\,p_{n_2}(z,x) \geq p_{n_1}(x,x)\,p_{n_2}(x,x) > 0$$

Also, $n_1+n_2\in D(x)$. Folglich ist $D(x)$ abgeschlossen unter Addition.

a) $d(x)<\infty \implies D(x)\neq\{0\} \overset{\text{Satz 2.5 b)}}{\implies} \exists\, N(x)\in\mathbb{N}: \quad p_{nd(x)}(x,x)>0 \quad \forall\, n\geq N(x)$

b) "$\Rightarrow$" Folgt direkt aus a)

"$\Leftarrow$" Sei also nun $p_n(x,x)>0$ für alle $n\geq N(x)\in\mathbb{N}$. Dann enthält $D(x)$ unendlich viele Primzahlen. Folglich ist $d(x)=\mathrm{ggT}(D(x))=1$

$\square$

Beispiel 22: (Träge (lazy) Markovkette) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν,P)-Markovkette mit Zustandsraum E. Angenommen der Zustand $x\in E$ ist periodisch ($d(x)\geq 2$). Betrachte nun die Markovkette $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Startverteilung ν und Übergangsmatrix $P' = \varepsilon I + (1-\varepsilon)P$, $\varepsilon\in(0,1)$, wobei I die Einheitsmatrix auf E ist.

Dann gilt $d(x)=1$ für alle $x\in E$, da

$$\{1\}\in\{n\in\mathbb{N}_0 : p'_n(x,x)>0\}$$

Die Markovkette $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nennt man auch träge (lazy) Markovkette.

Aufgabe 14: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf E mit Übergangsmatrix P. Setze

$$T_0 := 0 \quad \text{und} \quad T_k := \inf\{n>T_{k-1} : X_n \neq X_{n-1}\}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Hierbei beschreibt die Folge $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ den Zeitpunkt des k-ten Sprunges. Zeigen, daß die Folge $(X^*_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $X^*_n := X_{T_n}$ eine Markovkette (eingebettete Sprungkette) mit Übergangsmatrix $P^* = (p^*(x,y))_{x,y\in E}$, $p^*(x,y) = \dfrac{p(x,y)}{1-p(x,x)}$ $(y\neq x)$ ist.