1.3. Stoppzeiten und starke Markoveigenschaft

Frage: Wie lassen sich zufällige Zeitpunkte beschreiben?

Definition (erzeugte σ-Algebra)

Sei $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein stochastischer Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in $(E, \mathcal{E})$. Setze

$$\mathcal{F}_n^X := \sigma\left(X_k : k \in \{0, \dots, n\}\right) := \left\{ (X_0, \dots, X_n)^{-1}(B) : B \in \mathcal{E}^{\otimes(n+1)} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann heißt $(\mathcal{F}_n^X)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die von X erzeugte σ-Algebra.

Erinnerung: Sei $\Omega \neq \emptyset$, $(\Omega', \mathcal{F}')$ ein meßbarer Raum und $X : \Omega \to \Omega'$. Dann ist

$$X^{-1}(\mathcal{F}') := \left\{ X^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}' \right\}$$

eine σ-Algebra. Zudem gilt für jedes System $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{F}'$

$$\sigma\left(X^{-1}(\mathcal{A}')\right) = X^{-1}\left(\sigma(\mathcal{A}')\right).$$

Bemerkung 9: a) Es gilt $\mathcal{F}_m^X \subseteq \mathcal{F}_n^X \subseteq \mathcal{F}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$.

b) $\mathcal{F}_n^X$ umfaßt alle Informationen, die ein Beobachter von $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bis zum Zeitpunkt n hat.

Definition (Stoppzeit)

Sei $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in E. Eine Abbildung $T : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt Stoppzeit bzgl. X, wenn gilt

$$\{T = n\} \in \sigma(X_0, \dots, X_n) = \mathcal{F}_n^X \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Bemerkung 10: Das Ereignis $\{T = \infty\}$ kann interpretiert werden, daß die Stoppzeit nie eintritt.

Beispiel 14: Sei $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozeß mit Zustandsraum E und $A \subseteq E$.

a) Die erste Rückkehr- bzw. Treffzeit S_A und die Eintrittszeit T_A ist gegeben durch

$$S_A(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) \in A\}$$

$$T_A(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n(\omega) \in A\} \qquad (\inf \emptyset := \infty)$$

sind Stoppzeiten, denn

$$\{S_A = n\} = \{X_1 \notin A, \dots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\} \in \mathcal{F}_n^X$$

$$\{T_A = n\} = \{X_0 \notin A, \dots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\} \in \mathcal{F}_n^X$$

Insbesondere gilt $\mathbb{P}[T_A = S_A \mid X_0 = x] = 1$ für alle $x \notin A$.

b) Die k-te Treffzeit ist gegeben durch

$$S_A^0(\omega) := 0 \quad , \quad S_A^k(\omega) := \inf\{ n > S_A^{k-1}(\omega) : X_n \in A \} \quad , \; k \in \mathbb{N}.$$

c) Jede deterministische Zeit $T(\omega) = t$, $t \in \mathbb{N}_0$ ist eine Stoppzeit, da

$$\{T = n\} \in \{\emptyset, \Omega\} \in \mathcal{F}_n^X \quad , \; n \in \mathbb{N}_0$$

d) Die letzte Austrittszeit auf der Menge A

$$L_A(\omega) := \sup\{ n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in A \}$$

ist i.A. keine Stoppzeit, da $\{L_A = n\}$ davon abhängt, ob $(X_{n+m})_{m \in \mathbb{N}_0}$ die Menge A trifft oder nicht.

Frage: Wie kann man die Eintrittswahrscheinlichkeit einer Markovkette in eine Menge A berechnen?

Definition (Generator)

Sei P eine stochastische Matrix. Dann nennt man $L := P - I$ den zugehörigen (diskreten) Generator, wobei mit I die Einheitsmatrix bezeichnet sei.

Definition (Dirichletproblem)

Sei $\emptyset \neq A \subsetneq E$ und $g: A \to \mathbb{R}$. Dann heißt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} (Lf)(x) = 0 & , x \in A^c \\ f(x) = g(x) & , x \in A \end{cases}$$

das zu L gehörige Dirichletproblem auf A^c mit Randwerten g auf A.

Satz 1.14 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E. Für $A \subsetneq E$ setze $h_A(x) := \mathbb{P}_x[T_A < \infty]$, $x \in E$, wobei T_A die erste Eintrittszeit in die Menge A bezeichne. Dann ist h_A die kleinste, nicht-negative Lösung des Dirichletproblems

$$\begin{cases} (Lh_A)(x) = 0 & , x \in A^c \\ h_A(x) = 1 & , x \in A \end{cases} \qquad (*)$$

Beweis: Zu zeigen: h_A ist eine Lösung des Dirichletproblems $(*)$.

Da $\{X_0 \in A\} = \{T_A = 0\}$, ist folglich $h_A(x) = 1$ für alle $x \in A$.

Sei also nun $x \in A^c$. Dann folgt mit Satz 1.10

$$\mathbb{P}_x[T_A < \infty] = \mathbb{P}_x[T_A \in \mathbb{N}] = \sum_{y \in E} \mathbb{P}_x[T_A \in \mathbb{N}, X_1 = y]$$

$$= \sum_{y \in E} \mathbb{P}[X_1 = y \mid X_0 = x]\, \mathbb{P}_\nu[T_A \in \mathbb{N} \mid X_0 = x, X_1 = y]$$

$$\overset{\text{Satz 1.10}}{=} \sum_{y \in E} p(x,y)\, \mathbb{P}_y[T_A \in \mathbb{N}_0]$$

Also,

$$h_A(x) = \mathbb{P}_x[T_A < \infty] = \sum_{y \in E} p(x,y)\, \mathbb{P}_y[T_A < \infty] = \sum_{y \in E} p(x,y)\, h_A(y) \iff (Lh_A)(x) = 0$$

<u>zu zeigen:</u> h_A ist die kleinste, nichtnegative Lösung von (*)

Sei also $h : E \to [0,\infty)$ eine weitere Lösung des Dirichletproblems (*), d.h.

$$\begin{cases} (Lh)(x) = 0 & , x \notin A \\ h(x) = 1 & , x \in A \end{cases}$$

<u>zu zeigen:</u> Für alle $N \in \mathbb{N}_0$ gilt $\mathbb{P}_x[T_A \leq N] \leq h(x)$, $x \in E$

Für jedes $N \in \mathbb{N}_0$ und $x \in A$ folgt $\mathbb{P}_x[T_A \leq N] = 1 = h(x)$. Für $x \in A^c$ ergibt sich mittels vollständige Induktion über N

$\boxed{\text{IA}}$ $N = 0$: $\quad \mathbb{P}_x[T_A = 0] \overset{x \notin A}{=} 0 \leq h(x)$

$\boxed{\text{IS}}$ $N \to N+1$: Sei also $x \notin A$. Dann gilt mittels Satz 1.10

$$\mathbb{P}_x[T_A \leq N+1] = \mathbb{P}_x[1 \leq T_A \leq N+1]$$

$$= \sum_{y \in E} \mathbb{P}[X_1 = y \mid X_0 = x]\, \mathbb{P}_\nu[1 \leq T_A \leq N+1 \mid X_0 = x, X_1 = y]$$

$$\overset{\text{Satz 1.10}}{=} \sum_{y \in E} p(x,y)\, \mathbb{P}_y[T_A \leq N]$$

$$\overset{\boxed{\text{IV}}}{\leq} \sum_{y \in E} p(x,y)\, h(y)$$

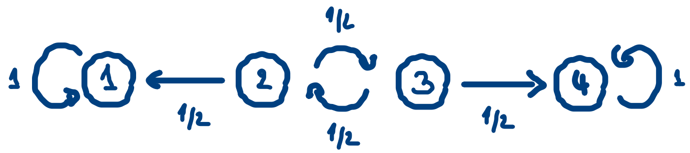
$$\overset{(Lh)(x)=0}{=} h(x)$$

Da $\{T_A \leq N\} \uparrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{T_A \leq k\} = \{T_A < \infty\}$ für $N \to \infty$, so folgt aus der Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}_x$

$$h_A(x) = \mathbb{P}_x[T_A < \infty] = \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}_x[T_A \leq N] \leq h(x), \quad x \in E$$

$\square$

Beispiel 15: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν,P)-Markovkette auf $E=\{1,2,3,4\}$, deren stochastische Matrix durch folgenden Übergangsgraphen beschrieben wird



Im folgenden soll die Eintrittswahrscheinlichkeit in den Zustand $\{4\}$, d.h.

$$h_{\{4\}}(x) := \mathbb{P}_x[T_{\{4\}}<\infty] \quad , \; x\in E$$

bestimmt werden. Nach Satz 1.14 genügt es dazu, die minimale Lösung des Dirichlet-problems (*) mit $A=\{4\}$ zu berechnen. Betrachte somit folgendes Gleichungssystem

$\mathrm{I}: \; h_{\{4\}}(1) = c$ $\qquad$ $\mathrm{II}: \; h_{\{4\}}(2) = \frac{1}{2}\left(h_{\{4\}}(1) + h_{\{4\}}(3)\right)$

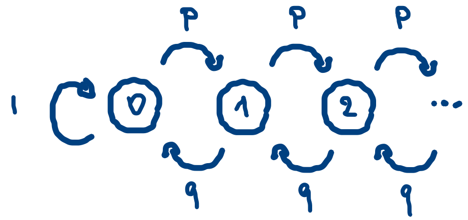
$\mathrm{III}: \; h_{\{4\}}(3) = \frac{1}{2}\left(h_{\{4\}}(2) + h_{\{4\}}(4)\right)$ $\qquad$ $\mathrm{IV}: \; h_{\{4\}}(4) = 1$

$$\Longleftrightarrow \quad h_{\{4\}} = \left(c, \; \tfrac{2}{3}c + \tfrac{1}{3}, \; \tfrac{1}{3}c + \tfrac{2}{3}, \; 1\right)^T$$

Folglich besitzt das obige Gleichungssystem erst durch die Minimalitätsbedingung eine eindeutige Lösung. Wähle hierzu $c=0$. Dann folgt

$$h_{\{4\}}(2) = \mathbb{P}_2[T_{\{4\}}<\infty] = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad h_{\{4\}}(3) = \mathbb{P}_3[T_{\{4\}}<\infty] = \frac{2}{3}.$$

Beispiel 16: (Ruinwahrscheinlichkeit) Betrachte eine einfache, asymmetrische Irrfahrt auf $E = \mathbb{N}_0$ mit Absorbtion im Zustand 0:



$0 < p = 1-q < 1 \qquad A = \{0\}$

Wiederum soll die Eintrittswahrscheinlichkeit in $\{0\}$ (= Absorbtionswahrscheinlichkeit) bestimmt werden. Aus Satz 1.14 folgt, daß $h_{\{0\}}(x) := \mathbb{P}_x[T_{\{0\}} < \infty]$, $x \in E$ die minimale, nichtnegative Lösung des folgenden Dirichletproblems ist:

$$\begin{cases} (Lh_{\{0\}})(x) = p\left(h_{\{0\}}(x+1) - h_{\{0\}}(x)\right) + q\left(h_{\{0\}}(x-1) - h_{\{0\}}(x)\right) = 0, & x \neq 0 \\ h_{\{0\}}(0) = 1 \end{cases}$$

Beh.: Für $p \neq q$ ist die Lösung von $(Lh)(x) = 0$ für alle $x \in E$ gegeben durch

$$h(x) = a + b\left(\frac{q}{p}\right)^x$$

Es gilt nämlich für $x \in \mathbb{N}$

$$(Lh)(x) = pb\left(\frac{q}{p}\right)^x\left(\frac{q}{p} - 1\right) + qb\left(\frac{q}{p}\right)^x\left(\frac{p}{q} - 1\right) = b\left(\frac{q}{p}\right)^x(q - p + p - q) = 0$$

Fall 1: $p<q$

Da $h_{\{0\}}(x) \in [0,1]$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$, folgt $b=0$ und, wegen $h_{\{0\}}(0)=1$, $a=1$. Also

$$h_{\{0\}}(x) = \mathbb{P}_x[T_{\{0\}}<\infty] = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{N}_0$$

Fall 2: $p>q$

Aus $h_{\{0\}}(0)=1$ folgt zunächst einmal, daß $b=1-a$. Also

$$[0,1] \ni h_{\{0\}}(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^x + a\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^x\right) \quad \forall x \in \mathbb{N}_0 \quad \Rightarrow \quad a \geq 0$$

Somit impliziert erst die Minimalitätsbedingung, daß $a=0$ ist, d.h.

$$h_{\{0\}}(x) = \mathbb{P}_x[T_{\{0\}}<\infty] = \left(\frac{q}{p}\right)^x \quad \forall x \in \mathbb{N}_0$$

Beh.: Für $p=q$ ist die Lösung von $(Lh)(x)=0$ für alle $x \in E$ gegeben durch

$$h(x) = a + bx.$$

Denn für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt $(Lh)(x) = \frac{1}{2}b(x+1-x) + \frac{1}{2}b(x-1-x) = 0$.

Da $h_{\{0\}}(x) \in [0,1]$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$, so folgt $b=0$. Wegen $h_{\{0\}}(0)=1$ ist zudem $a=1$:

$$h_{\{0\}}(x) = \mathbb{P}_x[T_{\{0\}}<\infty] = 1$$

__Beispiel 17:__ (Aussterbewahrscheinlichkeit von Verzweigungsprozessen) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Verzweigungsprozeß*, d.h. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Markovkette mit Zustandsraum $E=\mathbb{N}_0$ und Übergangsmatrix $P=(p(x,y))_{x,y\in E}$

$$p(x,y) = \mu^{*x}(y) \qquad \text{mit} \qquad \mu^{*0}(y) := \mathbb{1}_{\{0\}}(y),$$

wobei μ eine gegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung auf E ist.

__Ziel:__ Berechne $\mathbb{P}_x[T_{\{0\}}<\infty]$, $x\in E$ (= Aussterbewahrscheinlichkeit)

__Beh.:__ Für alle $n\in\mathbb{N}_0$ gilt $\mathbb{P}_x[X_n=0] = \mathbb{P}_1[X_n=0]^x$, $x\in E$

Beweis durch vollständige Induktion über n.

$\boxed{\text{IA}}$ $n=0$: $\quad \mathbb{P}_x[X_0=0] = \mathbb{1}_{\{x\}}(0) = \mathbb{P}_1[X_0=0]^x \qquad (0^0=1)$

$\boxed{\text{IS}}$ $n\to n+1$: Es gilt nun aber

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x[X_{n+1}=0] &= \sum_{y\in E}\mathbb{P}[X_{n+1}=0, X_1=y \mid X_0=x]\\ &= \sum_{y\in E}\mathbb{P}[X_1=y\mid X_0=x]\,\mathbb{P}[X_{n+1}=0\mid X_0=x, X_1=y]\\ &\overset{\text{Satz 1.10}}{=} \sum_{y\in E} p(x,y)\,\mathbb{P}_y[X_n=0]\end{aligned}$$

---

* vgl. Beispiel 11

Nach Induktionsvoraussetzung gilt weiterhin

$$\sum_{y\in E} p(x,y)\, \mathbb{P}_y[X_n=0] \overset{\boxed{IV}}{=} \sum_{y\in E} \mu^{*x}(y)\, \mathbb{P}_1[X_n=0]^y$$

$$= \sum_{y\in E} \sum_{y_1+\dots+y_x=y} \mu(y_1)\cdot\ldots\cdot\mu(y_x)\, \mathbb{P}_1[X_n=0]^{y_1+\dots+y_x}$$

$$= \sum_{y_1,\dots,y_x\geq 0} \mu(y_1)\,\mathbb{P}_1[X_n=0]^{y_1}\cdot\ldots\cdot \mu(y_x)\,\mathbb{P}_1[X_n=0]^{y_x}$$

$$= \Big(\sum_{z\geq 0} \mu(z)\, \mathbb{P}_1[X_n=0]^z\Big)^x$$

$$\overset{\boxed{IV}}{=} \Big(\sum_{z\in E} p(1,z)\, \mathbb{P}_z[X_n=0]\Big)^x$$

$$\overset{\text{Satz 1.10}}{=} \Big(\sum_{z\in E} \mathbb{P}[X_1=z\,|\,X_0=1]\, \mathbb{P}[X_{n+1}=0\,|\,X_0=1,\, X_1=z]\Big)^x$$

$$= \mathbb{P}_1[X_{n+1}=0]^x$$

Da $\{T_{\{0\}}\leq n\} = \{X_n=0\}$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$ und $\{T_{\{0\}}\leq n\}\uparrow \bigcup_{k=0}^{\infty}\{T_{\{0\}}\leq k\} = \{T_{\{0\}}<\infty\}$ für $n\to\infty$, so folgt aus der Stetigkeit von $\mathbb{P}_x$

$$\mathbb{P}_x[T_{\{0\}}<\infty] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x[X_n=0] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_1[X_n=0]^x = \mathbb{P}_1[T_{\{0\}}<\infty]^x$$

Folglich gilt $h_{\{0\}}(x) = h_{\{0\}}(1)^x =: q^x$ für alle $x \in E$.

Im folgenden soll $q \in [0,1]$ bestimmt werden. Da nach Satz 1.14 $h_{\{0\}}$ die kleinste, nichtnegative Lösung des Dirichletproblems (*) ist, gilt

$$(L h_{\{0\}})(1) = 0 \iff q = h_{\{0\}}(1) = \sum_{y \in E} \mu(y)\, h_{\{0\}}(1)^y = G_\mu(q),$$

wobei

$$G_\mu(s) := \sum_{y \in E} \mu(y)\, s^y \quad , \quad s \in [0,1]$$

die erzeugende Funktion von μ ist. Also ist q ein Fixpunkt der Gleichung

$$s = G_\mu(s)$$

Ist nun $\bar{q}$ ein weiterer Fixpunkt, so genügt die Funktion $h(x) := \bar{q}^x$ ebenfalls dem Dirichletproblem (*). Dann folgt aus Satz 1.14

$$\bar{q} = h(1) \geq h_{\{0\}}(1) = q,$$

d.h. q ist der kleinste, nichtnegative Fixpunkt der Gleichung $s = G_\mu(s)$.

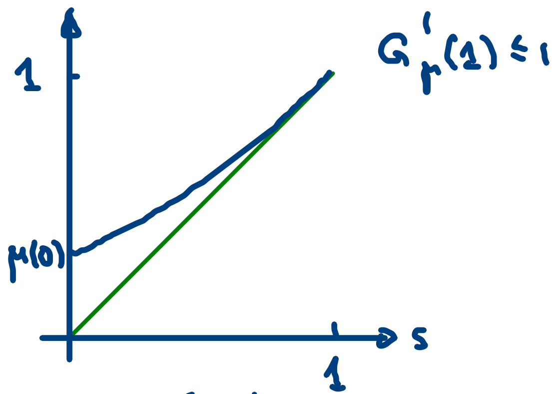
Nachfolgend soll der kleinste, nichtnegative Fixpunkt der Gleichung $s = G_\mu(s)$ genauer analysiert werden. Da μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf E ist, gilt

$$G_\mu(1) = \sum_{y \in E} \mu(y) = 1$$

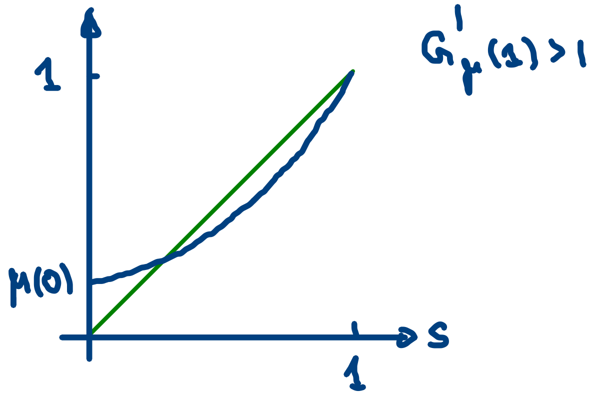
Falls μ entweder linear ($\mu(0)+\mu(1)=1$) oder strikt konvex mit

$$G_\mu'(1) = \lim_{s \uparrow 1} G_\mu'(s) = \lim_{s \uparrow 1} \sum_{k \geq 1} k\,\mu(k)\, s^{k-1} = \sum_{k \geq 0} k\,\mu(k) < \infty$$

so gilt



$q \in \{0,1\}$



$q \in [0,1)$

<u>Aufgabe 10</u>: Bestimme die Aussterbewahrscheinlichkeit eines Verzweigungsprozesses mit

a) $\mu(k) = (1-a)a^k$, $a \in (0,1)$ b) $\mu(k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$, $\lambda > 0$

Aufgabe 11: Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E. Für $\emptyset \neq A \subsetneq E$ sei $w_A(x) := \mathbb{E}_x[T_A]$, $x \in E$. Zeige, daß w_A die kleinste, nicht-negative Lösung des folgenden Randwertproblems ist

$$\begin{cases} (L w_A)(x) = -1 \ , & x \in A^c \\ w_A(x) = 0 \ , & x \in A \end{cases} .$$

Definition (harmonische Funktion)

Sei $A \subsetneq E$. Eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ heißt harmonisch auf A^c, wenn für alle $x \in A^c$

$(Lf)(x)$ existiert und $(Lf)(x) = 0$.

Aufgabe 12: Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix P und Zustandsraum E. Weiterhin sei $\mathbb{P}_x[T_{\{y\}} < \infty] = 1$ für alle $x, y \in E$. Zeige: Ist $h : E \to [0, \infty)$ eine beschränkte harmonische Funktion, so ist h konstant.

Frage: Gilt die Markoveigenschaft auch an Stoppzeiten?

Definition (T-Vergangenheit)

Ist $T: \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ eine Stoppzeit bzgl. eines stochastischen Prozesses $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, so bezeichnet

$$\mathcal{F}_T^X := \{ A \in \mathcal{F} : A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n^X \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0 \}$$

die Menge der Ereignisse der T-Vergangenheit.

Bemerkung !!: $\mathcal{F}_T^X$ ist eine σ-Algebra. Da T eine Stoppzeit bzgl. X ist, ist $\Omega \in \mathcal{F}_T^X$.

Weiterhin gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in \mathcal{F}_T^X$

$$A^c \cap \{T = n\} = \big(\underbrace{A \cap \{T = n\}}_{\in \mathcal{F}_n^X}\big)^c \cap \underbrace{\{T = n\}}_{\in \mathcal{F}_n^X} \in \mathcal{F}_n^X$$

Somit ist auch $A^c \in \mathcal{F}_T^X$. Seien nun $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_T^X$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \cap \{T = n\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \big(\underbrace{A_i \cap \{T = n\}}_{\in \mathcal{F}_n^X}\big) \in \mathcal{F}_n^X$$

Also ist auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_T^X$.

Satz 1.15 (starke Markoveigenschaft) Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν,P)-Markovkette mit Zustandsraum E und T eine Stoppzeit, so gilt für alle $A\in\mathcal{E}^{\otimes\mathbb{N}_0}$, $F\in\mathcal{F}_T^X$ und $x\in E$ mit $\mathbb{P}_\nu[F, X_T=x, T<\infty]>0$

$$\mathbb{P}_\nu[(X_T,X_{T+1},\dots)\in A \mid F, X_T=x, T<\infty] = \mathbb{P}_x[(X_0,X_1,\dots)\in A],$$

wobei X_T auf $\{T<\infty\}$ definiert ist durch $X_T(\omega):=X_{T(\omega)}(\omega)$.

Beweis: Sei also $A\in\mathcal{E}^{\otimes\mathbb{N}_0}$, $F\in\mathcal{F}_T^X$ und $x\in E$ mit $\mathbb{P}_\nu[F,X_T=x,T<\infty]>0$. Dann gibt es zu jedem $n\in\mathbb{N}_0$ ein $B\subseteq E^n$ mit

$$F\cap\{T=n\}\cap\{X_T=x\}=\{(X_0,\dots,X_{n-1})\in B, X_n=x\}.$$

Falls zudem $\mathbb{P}_\nu[(X_0,\dots,X_{n-1})\in B, X_n=x]>0$ ist, so folgt aus Satz 1.6

$$\mathbb{P}_\nu[(X_T,X_{T+1},\dots)\in A \mid F, X_T=x, T=n]$$

$$=\mathbb{P}_\nu[(X_n,X_{n+1},\dots)\in A \mid (X_0,\dots,X_{n-1})\in B, X_n=x]$$

$$\overset{\text{Satz 1.6}}{=}\mathbb{P}_x[(X_0,X_1,\dots)\in A]$$

Also,

$$\mathbb{P}_\nu\left[(X_T, X_{T+1}, \dots) \in A \mid F, X_T = x, T < \infty \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{P}_\nu\left[(X_T, X_{T+1}, \dots) \in A \mid F, X_T = x, T = n \right] \mathbb{P}_\nu\left[F, X_T = x, T = n \right]}{\mathbb{P}_\nu\left[F, X_T = x, T < \infty \right]}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{P}_x\left[(X_0, X_1, \dots) \in A \right] \mathbb{P}_\nu\left[F, X_T = x, T = n \right]}{\mathbb{P}_\nu\left[F, X_T = x, T < \infty \right]}$$

$$= \mathbb{P}_x\left[(X_0, X_1, \dots) \in A \right]$$

$\square$

<u>Korollar 1.16</u> Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E und

$$V_x := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X_n = x}, \quad x \in E.$$

Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_x\left[V_x > k \right] = \left(1 - \mathbb{P}_x\left[S_{\{x\}} = \infty \right] \right)^k.$$

Falls $\mathbb{P}_x\left[S_{\{x\}} = \infty \right] > 0$, so gilt

$$\mathbb{E}_x\left[V_x \right] = \frac{1}{\mathbb{P}_x\left[S_{\{x\}} = \infty \right]}$$

__Beweis:__ Für $x \in E$ definiere

$$S^0_{\{x\}} := 0 \quad \text{und} \quad S^k_{\{x\}} := \inf\{n > S^{k-1}_{\{x\}} : X_n = x\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\{V_x > k\} \cap \{X_0 = x\} = \{S^k_{\{x\}} < \infty\} \cap \{X_0 = x\}.$$

Aus der starken Markoveigenschaft folgt somit

$$\mathbb{P}_x[V_x > k+1 \mid V_x > k] = \mathbb{P}_x[S^{k+1}_{\{x\}} < \infty \mid S^k_{\{x\}} < \infty] = \mathbb{P}_x[S^{k+1}_{\{x\}} < \infty \mid X_{S^k_{\{x\}}} = x, S^k_{\{x\}} < \infty]$$

$$= \mathbb{P}_\nu[\inf\{n > 0 : X_{S^k_{\{x\}}+n} = x\} + S^k_{\{x\}} < \infty \mid X_0 = x, X_{S^k_{\{x\}}} = x, S^k_{\{x\}} < \infty]$$

$$\overset{\text{Satz 1.15}}{=} \mathbb{P}_x[S^1_{\{x\}} < \infty]$$

Daraus folgt dann

$$\mathbb{P}_x[V_x > k] = \prod_{l=1}^{k-1} \mathbb{P}_x[V_x > l+1 \mid V_x > l] \cdot \mathbb{P}_x[V_x > 1] = \mathbb{P}_x[S^1_{\{x\}} < \infty]^k.$$

Weiterhin gilt im Falle $\mathbb{P}_x[S^1_{\{x\}} < \infty] < 1$

$$\mathbb{E}_x[V_x] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_x[V_x > k] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[V_x > k] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[S^1_{\{x\}} < \infty]^k$$

$$= \frac{1}{1 - \mathbb{P}_x[S^1_{\{x\}} < \infty]} = \frac{1}{\mathbb{P}_x[S^1_{\{x\}} = \infty]}$$

$\square$