Satz 1.10 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν,P)-Markovkette. Dann gilt für alle $n\in\mathbb{N}_0$, $A\in\mathcal{E}^{\otimes\mathbb{N}_0}$, $B\subseteq E^n$ und $x\in E$ mit $\mathbb{P}_\nu[(X_0,\dots,X_{n-1})\in B, X_n=x]>0$

$$\mathbb{P}_\nu[(X_n,X_{n+1},\dots)\in A \mid (X_0,\dots,X_{n-1})\in B, X_n=x] = \mathbb{P}_x[(X_0,X_1,\dots)\in A].$$

Beweis: **Schritt 1** Für ein beliebiges $k\in\mathbb{N}_0$ und $x_0,\dots,x_k\in E$ betrachte zunächst

$$\mathbb{P}_\nu[(X_0,\dots,X_{n-1})\in B, X_n=x, X_{n+i}=x_i \text{ für alle } i\in\{0,1,\dots,k\}]$$

$$\overset{\text{Satz 1.7(i)}}{=} \sum_{(y_0,\dots,y_{n-1})\in B} \nu(y_0)p(y_0,y_1)\cdot\ldots\cdot p(y_{n-1},x)\,\mathbb{1}_{x=x_0}\,p(x_0,x_1)\cdot\ldots\cdot p(x_{k-1},x_k)$$

$$= \mathbb{P}_\nu[(X_0,\dots,X_{n-1})\in B, X_n=x]\;\mathbb{P}_x[X_i=x_i \text{ für alle } i\in\{0,1,\dots,k\}]$$

Da E diskret ist, folgt somit die Behauptung für alle endlich-dimensionalen Rechtecksmengen.

Schritt 2 Betrachte das Mengensystem

$$\mathcal{D}=\{A\in\mathcal{E}^{\otimes\mathbb{N}_0} : \mathbb{P}_\nu[(X_n,X_{n+1},\dots)\in A \mid (X_0,\dots,X_{n-1})\in B, X_n=x] = \mathbb{P}_x[(X_0,X_1,\dots)\in A]\}$$

<u>Zu zeigen:</u> $\mathcal{D}$ ist ein Dynkinsystem

1. Da $\mathbb{P}_\nu[(X_n, X_{n+1}, \dots) \in E^{\mathbb{N}_0} \mid (X_0, \dots, X_{n-1}) \in B, X_n = x] = 1 = \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, \dots) \in E^{\mathbb{N}_0}]$

   ist somit $E^{\mathbb{N}_0} \in \mathcal{D}$

2. Sei $D \in \mathcal{D}$. Dann ist auch $D^c \in \mathcal{D}$, denn

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_\nu[(X_n, X_{n+1}, \dots) \in D^c \mid (X_0, \dots, X_{n-1}) \in B, X_n = x] \\
&= 1 - \mathbb{P}_\nu[(X_n, X_{n+1}, \dots) \in D \mid (X_0, \dots, X_{n-1}) \in B, X_n = x] \\
&= 1 - \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, \dots) \in D] && (D \in \mathcal{D}) \\
&= \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, \dots) \in D^c]
\end{aligned}$$

3. Seien nun $D_1, D_2, \dots \in \mathcal{D}$ disjunkt und $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_\nu[(X_n, X_{n+1}, \dots) \in D \mid (X_0, \dots, X_{n-1}) \in B, X_n = x] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_\nu[(X_n, X_{n+1}, \dots) \in D_i \mid (X_0, \dots, X_{n-1}) \in B, X_n = x] && (\sigma\text{-Additivität}) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, \dots) \in D_i] && (D_i \in \mathcal{D}) \\
&= \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, \dots) \in D] && (\sigma\text{-Additivität})
\end{aligned}$$

Also ist auch $D \in \mathcal{D}$.

Da nun $\mathcal{D}$ nach Schritt 1 auch das $\cap$-stabile Mengensystem $\mathcal{Z}$ der endlich-dimensionalen Rechtecke enthält, folgt aus dem Hauptsatz über Dynkinsysteme

$$\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{D} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{N}_0} = \sigma(\mathcal{Z}) = d(\mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{N}_0}$$

$\square$

<u>Korollar 1.11</u> (Unabhängigkeit von Zukunft und Vergangenheit bei geg. Gegenwart)

Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν,P)-Markovkette, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $A \in \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{N}_0}$, $B \subseteq E^n$, $x \in E$ mit $\mathbb{P}[X_n = x] > 0$

$$\mathbb{P}[(X_0,\dots,X_{n-1}) \in B, (X_{n+1}, X_{n+2}, \dots) \in A \mid X_n = x]$$
$$= \mathbb{P}[(X_0,\dots,X_{n-1}) \in B \mid X_n = x]\, \mathbb{P}[(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots) \in A \mid X_n = x].$$

<u>Beweis:</u> Sei $\mathbb{P}[(X_0,\dots,X_{n-1}) \in B, X_n = x] > 0$. Dann folgt aus Satz 1.10

$$\mathbb{P}[(X_0,\dots,X_{n-1}) \in B, (X_{n+1}, X_{n+2}, \dots) \in A \mid X_n = x]$$
$$= \mathbb{P}[(X_0,\dots,X_{n-1}) \in B \mid X_n = x]\, \mathbb{P}_\nu[(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots) \in A \mid (X_0,\dots,X_{n-1}) \in B, X_n = x]$$
$$= \mathbb{P}[(X_0,\dots,X_{n-1}) \in B \mid X_n = x]\, \mathbb{P}_x[(X_1, X_2, \dots) \in A]$$
$$= \mathbb{P}[(X_0,\dots,X_{n-1}) \in B \mid X_n = x]\, \mathbb{P}[(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots) \in A \mid X_n = x]$$

$\square$

Satz 1.12 (Existenz von Markovketten) Zu jeder stochastischen Matrix $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ und jedem Wahrscheinlichkeitsvektor $\nu : E \to [0,1]$ existiert eine bzgl. Verteilung eindeutige (ν, P)-Markovkette.

Beweis: Das Ziel ist es den Satz von Daniell-Kolmogorov anzuwenden.

Schritt 1 Definiere die Mengenfunktion $Q_{\{0,1,\dots,n\}} : \mathcal{E}^{\otimes(n+1)} \to [0,\infty]$ durch

$$Q_{\{0,1,\dots,n\}}[\{x_0, x_1, \dots, x_n\}] := \nu(x_0)\, p(x_0,x_1)\cdot\ldots\cdot p(x_{n-1},x_n) \quad , \quad x_0,\dots,x_n \in E$$

Zu zeigen: $Q_{\{0,1,\dots,n\}}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß

Offensichtlich ist $Q_{\{0,1,\dots,n\}}[\emptyset] = 0$ und für alle $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{E}^{\otimes(n+1)}$ disjunkt gilt

$$\begin{aligned} Q_{\{0,1,\dots,n\}}\Big[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big] &= \sum_{x_0,\dots,x_n\in E} \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}(x_0,\dots,x_n)\, \nu(x_0)\, p(x_0,x_1)\cdot\ldots\cdot p(x_{n-1},x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{x_0,\dots,x_n\in E} \mathbb{1}_{A_i}(x_0,\dots,x_n)\, \nu(x_0)\, p(x_0,x_1)\cdot\ldots\cdot p(x_{n-1},x_n) \qquad (A_i \text{ disjunkt}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} Q_{\{0,1,\dots,n\}}[A_i] \end{aligned}$$

Zudem gilt, da P eine stochastische Matrix und ν ein Wahrscheinlichkeitsvektor ist

$$\sum_{x_0,\dots,x_n \in E} Q_{\{0,1,\dots,n\}}[\{x_0,\dots,x_n\}] = \sum_{x_0 \in E} \nu(x_0) \sum_{x_1 \in E} p(x_0,x_1) \dots \sum_{x_n \in E} p(x_{n-1},x_n) = 1$$

<u>Zu zeigen</u>: $\quad Q_{\{0,1,\dots,n\}} = Q_{\{0,1,\dots,n+1\}} \circ \left(\pi^{\{0,\dots,n+1\}}_{\{0,\dots,n\}}\right)^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Für $A \in \mathcal{E}^{\otimes(n+1)}$ gilt

$$Q_{\{0,1,\dots,n+1\}}\left[\left(\pi^{\{0,\dots,n+1\}}_{\{0,\dots,n\}}\right)^{-1}(A)\right]$$

$$= \sum_{x_0,\dots,x_n \in A} \nu(x_0) p(x_0,x_1) \cdot \ldots \cdot p(x_{n-1},x_n) \underbrace{\sum_{x_{n+1} \in E} p(x_n,x_{n+1})}_{=1} = Q_{\{0,1,\dots,n\}}[A]$$

Folglich ist die Familie $\{Q_{\{0,1,\dots,n\}} : n \in \mathbb{N}_0\}$ konsistent. Aus Satz 1.4 folgt somit die Existenz genau eines Wahrscheinlichkeitsmaßes Q auf $(E^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{N}_0})$ mit

$$Q_{\{0,1,\dots,n\}} = Q \circ \pi^{-1}_{\{0,\dots,n\}}$$

<u>Schritt 2</u> Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum E. Definiere $\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1} := Q$.

<u>Zu zeigen:</u> $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein (ν,P)-Markovkette

Aus Lemma 1.2 (i) folgt zunächst einmal, daß

$$\mathbb{P}[X_0=x_0,\dots,X_n=x_n] = \mathbb{P}_{X_{\{0,\dots,n\}}}[\{x_0,\dots,x_n\}] = (\mathbb{P}_X\circ\pi^{-1}_{\{0,\dots,n\}})[\{x_0,\dots,x_n\}]$$

$$= (Q\circ\pi^{-1}_{\{0,\dots,n\}})[\{x_0,\dots,x_n\}]$$

$$= Q_{\{0,1,\dots,n\}}[\{x_0,\dots,x_n\}]$$

$$= \nu(x_0)\,p(x_0,x_1)\cdot\ldots\cdot p(x_{n-1},x_n)$$

Damit folgt die Behauptung aus dem Satz 1.7 (i)

$\square$

<u>Satz 1.13</u> Sei $P=(p(x,y))_{x,y\in E}$ eine stochastische Matrix, ν eine Verteilung auf E und $(U_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen mit $U_0\sim\mathrm{Unif}([0,1])$. Dann existieren Funktionen $f:[0,1]\to E$ und $F:E\times[0,1]\to E$ so, daß $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$X_n := \begin{cases} f(U_0), & n=0 \\ F(X_{n-1},U_n), & n\in\mathbb{N} \end{cases} \qquad (*)$$

eine (ν,P)-Markovkette ist.

Beweis: Schritt 1: Sei $E = \mathbb{N}$. Setze

$$\alpha(0) := 0 \;, \quad \alpha(i) := \sum_{k=1}^{i} \nu[\{k\}] \quad \text{und} \quad \beta(i,0) := 0 \;, \quad \beta(i,j) := \sum_{k=1}^{j} p(i,k) \;, \quad i \in \mathbb{N}$$

Weiterhin definiere die Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{N}$ und $F : \mathbb{N} \times [0,1] \to \mathbb{N}$ durch

$$f(u) := \sum_{i=1}^{\infty} i \, \mathbb{1}_{\alpha(i-1) \leq u < \alpha(i)}$$

$$F(i,u) := \sum_{j=1}^{\infty} j \, \mathbb{1}_{\beta(i,j-1) \leq u < \beta(i,j)}$$

Dann gilt für die durch (*) definierte Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und alle $i_0, \dots, i_n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n] \\
&\quad = \mathbb{P}\big[\, U_0 \in [\alpha(i_0 - 1), \alpha(i_0)), \; U_k \in [\beta(i_{k-1}, i_k - 1), \beta(i_{k-1}, i_k)) \;\forall k \in \{1, \dots, n\} \big] \\
&\quad \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{P}\big[\, U_0 \in [\alpha(i_0 - 1), \alpha(i_0))\big] \; \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big[\, U_k \in [\beta(i_{k-1}, i_k - 1), \beta(i_{k-1}, i_k))\big] \\
&\quad = \nu(i_0)\, p(i_0, i_1) \cdot \ldots \cdot p(i_{n-1}, i_n)
\end{aligned}$$

Also ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nach Satz 1.7 (i) ein (ν, P)-Markovkette.

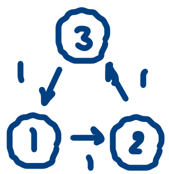
Schritt 2: Da E abzählbar ist, gibt es eine bijektive Funktion $\varphi : \mathbb{N} \to E$. Die Aussage des Satzes folgt somit aus Schritt 1. $\square$

Bemerkung 8: Im Schritt 2 haben wir implizit benutzt, daß für eine Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf E und einer bijektiven Funktion $f: E\to E'$ gilt, daß $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ wiederum eine Markovkette ist.

⚠ Funktionen von Markovketten sind im Allgemeinen nicht Markovsch.

Beispiel 13: Sei $E=\{1,2,3\}$, $P=(p(x,y))_{x,y\in E}$ mit $p(1,2)=p(2,3)=p(3,1)=1$ und $\nu(x)=\frac{1}{3}$.

Weiter sei $E'=\{a,b\}$ und betrachte die Abbildung



$f: E\to E'$, $\quad f(1)=f(2)=a$ und $f(3)=b$

Setze $Y_n = f(X_n)$. Dann gilt

$$\mathbb{P}[Y_2=a \mid Y_1=a, Y_0=a] = 0 \neq \frac{1}{2} = \mathbb{P}[Y_2=a \mid Y_1=a]$$

Aufgabe 9: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν,P)-Markovkette auf E und $f: E\to E'$. Unter welchen (nicht trivialen) Bedingungen an f und P ist $(f\circ X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette?