VL Markovketten

Lit.: • Norris, "Markov chains"

• Brémaud, "Markov chains"

• Karlin, Taylor, "A first course in stochastic processes"

1. Markovprozesse mit diskretem Zustandsraum

1.1. Stochastische Prozesse und ihre Verteilung

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(E, \mathcal{E})$ ein meßbarer Raum und I eine nichtleere Indexmenge. z.B

$$E = \begin{cases} \text{endlich, abzählbar unendlich} \\ \mathbb{R}, \mathbb{R}^d \\ \text{Funktionenraum} \end{cases} \qquad I = \begin{cases} \text{diskret } (\text{endlich}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}) \\ \text{kontinuierlich } ([0,\infty), \mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \end{cases}$$

Interpretation: E ist der Zustandsraum ("Ort") und I ist die "Zeit"

Definition (stochastischer Prozeß)

Ein stochastischer Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten im Zustandsraum $(E, \mathcal{E})$ ist eine Familie $(X_t)_{t \in I}$ von E-wertigen Zufallsvariablen. Für festes $\omega \in \Omega$ heißt die Abbildung

$$I \ni t \longmapsto X_t(\omega)$$

eine Trajektorie (Pfad, Realisierung) von $(X_t)_{t \in I}$. Falls $I = \mathbb{N}_0$ oder $I = [0, \infty)$, so heißt die Verteilung von X_0 die Startverteilung des stochastischen Prozesses.

Bemerkung 1: Falls E diskret ist, so bezeichnet man eine Verteilung auch als Wahrscheinlichkeitsvektor.

Erinnerung: Eine Abbildung $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$ heißt meßbar, wenn

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \qquad \forall B \in \mathcal{E}$$

Die Verteilung $\mathbb{P}_X := \mathbb{P} \circ X^{-1}$ ist das Bildmaß auf $(E, \mathcal{E})$ von $\mathbb{P}$ unter X, d.h.

$$\mathbb{P}_X[B] := (\mathbb{P} \circ X^{-1})[B] = \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}], \quad B \in \mathcal{E}$$

Ziel: Charakterisierung der Verteilung des stochastischen Prozesses $(X_t)_{t\in I}$

zunächst einmal läßt sich der Produktraum E^I auch als Menge $\{x : I \to E\}$ aller Abbildungen von I nach E interpretieren.

Frage: Wie läßt sich die zugehörige Produkt-σ-Algebra $\mathcal{E}^{\otimes I}$ charakterisieren?

Aufgabe 1: Sei $E \neq \emptyset$ und $\mathcal{C}$ eine Familie von Teilmengen der Potenzmenge 2^E.
Zeige, daß es eine kleinste σ-Algebra $\mathcal{E}$ über E gibt, die $\mathcal{C}$ enthält.

Definition (Produkt-σ-Algebra, Erzeuger)

Die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{E}^{\otimes I}$ ist die kleinste σ-Algebra über E^I, die die Menge $\mathcal{Z}$ aller endlich-dimensionalen Rechtecke (Zylindermengen) der Form

$$\{x \in E^I : x_{t_1} \in B_1, \ldots, x_{t_n} \in B_n\}$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in I$ und $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{E}$ enthält.

Aufgabe 2: Zeige, daß die Menge $\mathcal{Z}$ aller endlich-dimensionalen Rechtecke $\cap$-stabil ist.

Lemma 1.1: Sei $(X_t)_{t\in I}$ ein stochastischer Prozeß mit Zustandsraum $(E,\mathcal{E})$, und definiere die Abbildung $X : (\Omega,\mathcal{F}) \longrightarrow (E^I, \mathcal{E}^{\otimes I})$ durch $X(\omega) := (X_t(\omega))_{t\in I}$.

Dann ist X meßbar.

Beweis: Übungsaufgabe

Definition (Verteilung eines stochastischen Prozesses)

Die Verteilung eines stochastischen Prozesses $(X_t)_{t\in I}$ auf $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ mit Zustandsraum $(E,\mathcal{E})$ ist das Bildmaß von $\mathbb{P}$ unter der in Lemma 1.1 definierten Abbildung X, d.h.

$$\mathbb{P}_X[B] := (\mathbb{P}\circ X^{-1})[B] = \mathbb{P}[\{\omega\in\Omega : X(\omega)\in B\}], \quad B\in\mathcal{E}^{\otimes I}.$$

Frage: Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Verteilung eines stochastischen Prozesses und der Verteilung des Prozesses an endlich vielen Zeitpunkten?

Betrachte zwei nicht-leere, endliche Teilmengen $J, K \subseteq I$ mit $K \subseteq J$. Definiere

$$\pi_J : E^I \to E^J, \quad (x_t)_{t\in I} \mapsto \pi_J((x_t)_{t\in I}) := (x_t)_{t\in J}$$

$$\pi_K^J : E^J \to E^K, \quad (x_t)_{t\in J} \mapsto \pi_K^J((x_t)_{t\in J}) := (x_t)_{t\in K}$$

die endlich-dimensionalen Projektionen.

Da $\mathcal{E}^{\otimes J}$ von den Mengen $(\pi_{\{t\}}^J)^{-1}(A)$, $t\in J$, $A\in\mathcal{E}$ erzeugt wird und

$$\pi_J^{-1}\left((\pi_{\{t\}}^J)^{-1}(A)\right) = (\pi_{\{t\}}^J \circ \pi_J)^{-1}(A) = \pi_{\{t\}}^{-1}(A) \in \mathcal{E}^{\otimes I}$$

ist folglich π_J $(\mathcal{E}^{\otimes I}, \mathcal{E}^{\otimes J})$-meßbar.

<u>Aufgabe 3:</u> Zeige, daß π_K^J $(\mathcal{E}^{\otimes J}, \mathcal{E}^{\otimes K})$-meßbar ist.

<u>Definition</u> (endlich-dimensionale Verteilungen eines stochastischen Prozesses)

Sei $X = (X_t)_{t\in I}$ ein stochastischer Prozeß mit Verteilung $\mathbb{P}_X$ auf $(E^I, \mathcal{E}^{\otimes I})$ und $J \subseteq I$ eine nichtleere, endliche Teilmenge von I. Setze $X_J := (X_t)_{t\in J} = \pi_J(X)$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}_{X_J}$ heißt endlich-dimensionale Verteilung von X.

Notation: Für $B \in \mathcal{E}^{\otimes J}$ ist $\mathbb{P}_{X_J}[B] = (\mathbb{P} \circ (X_t)_{t\in J})^{-1}[B] = \mathbb{P}[(X_t)_{t\in J} \in B]$.

Lemma 1.2: Sei $X = (X_t)_{t\in I}$ ein stochastischer Prozeß mit Zustandsraum $(E, \mathcal{E})$.

(i) Für jede endliche Teilmenge $J \neq \emptyset$ von I gilt

$$\mathbb{P}_{X_J} = \mathbb{P}_X \circ \pi_J^{-1}$$

(ii) Für je zwei nicht-leere, endliche Teilmengen $J_1, J_2 \subseteq I$ mit $J_1 \subseteq J_2$ gilt

$$\mathbb{P}_{X_{J_1}} = \mathbb{P}_{X_{J_2}} \circ (\pi^{J_2}_{J_1})^{-1}.$$

Beweis: (i) Wegen $X_J = \pi_J((X_t)_{t\in I}) = \pi_J \circ X$ gilt

$$\mathbb{P}_{X_J} = \mathbb{P} \circ X_J^{-1} = \mathbb{P} \circ (\pi_J \circ X)^{-1} = (\mathbb{P} \circ X^{-1}) \circ \pi_J^{-1} = \mathbb{P}_X \circ \pi_J^{-1}$$

(ii) Wegen $X_{J_1} = \pi^{J_2}_{J_1} \circ X_{J_2}$ folgt die Behauptung aus (i). $\square$

Bemerkung 2: Lemma 1.2 (i) besagt, daß die endlich-dimensionalen Verteilungen durch die unendlich-dimensionale Verteilung eindeutig bestimmt ist.

Frage: Ist es auch möglich die unendlich-dimensionale Verteilung eindeutig durch die endlich-dimensionalen Verteilungen festzulegen?

Lemma 1.3: Für jedes $J \subseteq I$ sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q_J auf $(E^J, \mathcal{E}^{\otimes J})$ gegeben. Dann existiert höchstens ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(E^I, \mathcal{E}^{\otimes I})$ mit

$$Q_J = Q \circ \pi_J^{-1} \qquad \text{für alle endlichen } \emptyset \neq J \subseteq I.$$

Beweis: Da nach Aufgabe 2 die Menge $\mathcal{Z}$ der endlich-dimensionalen Rechtecke einen $\cap$-stabilen Erzeuger von $\mathcal{E}^{\otimes I}$ bilden und

$$Q\left[\{x \in E^I : x_j \in A_j \ \forall j \in J\}\right] = Q\left[\pi_J^{-1}\left(\bigtimes_{j \in J} A_j\right)\right] = (Q \circ \pi_J^{-1})\left[\bigtimes_{j\in J} A_j\right] = Q_J\left[\bigtimes_{j \in J} A_j\right]$$

für alle $\emptyset \neq J \subseteq I$ endlich und $A_j \in \mathcal{E}$ für alle $j \in J$, folgt die Aussage aus dem Eindeutigkeitssatz für Maße*

* vgl. Döring, Satz 2.1.12 oder Klenke, Lemma 1.42

⚠ Die eindimensionalen Verteilungen legen $\mathbb{Q}$ im Allgemeinen nicht eindeutig fest.

Beispiel 1: Betrachte eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen und $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei definiert durch $Y_n = X_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition (konsistente Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen)

Für jedes $\emptyset \neq J \subseteq I$ endlich sei $\mathbb{Q}_J$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(E^J, \mathcal{E}^{\otimes J})$.

Die Familie $\{ \mathbb{Q}_J : J \subseteq I \text{ endlich} \}$ heißt konsistent, wenn

$$\mathbb{Q}_{J_1} = \mathbb{Q}_{J_2} \circ (\pi^{J_2}_{J_1})^{-1} \qquad \forall \; J_1 \subseteq J_2 \subseteq I, \; \emptyset \neq J_1, J_2 \text{ endlich}$$

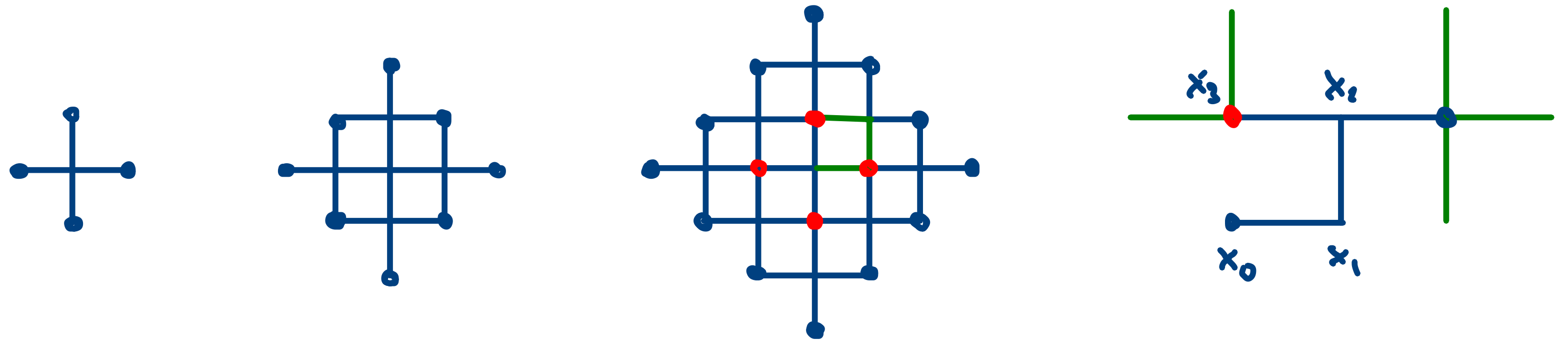
Bemerkung 3: (i) Die endlich-dimensionalen Verteilungen eines stochastischen Prozesses bilden eine konsistente Familie.

(ii) Falls $I = \mathbb{N}_0$ ist, so genügt es $J \subseteq I$ endlich der Form $J = \{0, 1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$ zu wählen.

Beispiel 2: Sei $I = \mathbb{N}_0$, $E = \mathbb{Z}^2$ und $Q_{\{0,\dots,n\}}$ die Gleichverteilung auf der Menge

$$A_n = \{(x_0,\dots,x_n) \in E^{n+1} : x_0 = 0,\ \|x_i - x_{i-1}\| = 1\ \forall i = 1,\dots,n,\ x_i \neq x_j\ \forall i,j \in \{0,\dots,n\}\}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die zugehörige Familie $\{Q_{\{0,\dots,n\}} : n \in \mathbb{N}_0\}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen nicht konsistent.



$|A_1| = 4$ $\qquad |A_2| = 4\cdot 3 = 12$ $\qquad |A_3| = 4\cdot 3\cdot 3 = 36$ $\qquad |A_4| = 28\cdot 3 + 8\cdot 2 = 100$

Dann gilt

$$Q_{\{0,\dots,3\}}\left[\{x_0,x_1,x_2,x_3\}\right] = \frac{1}{36} \neq \frac{2}{100} = Q_{\{0,\dots,4\}}\left[\left(\pi^{\{0,\dots,4\}}_{\{0,\dots,3\}}\right)^{-1}\left(\{x_0,x_1,x_2,x_3\}\right)\right]$$

Definition (Polnischer Raum)

Ein topologischer Raum $(E, \mathcal{J})$ heißt polnischer Raum, falls er vollständig metrisierbar und separabel ist.

Bemerkung 4:

- $(E, \mathcal{J})$ heißt vollständig metrisierbar, falls eine vollständige Metrik d auf E existiert, die $\mathcal{J}$ erzeugt.
- $(E, \mathcal{J})$ heißt separabel, falls es eine abzählbar dichte Teilmenge $A \subseteq E$ gibt, d.h. $\bar{A} = E$.

Bemerkung 5: Praktisch alle Räume, die in der Wahrscheinlichkeitstheorie bedeutsam sind, sind polnisch. z.B.

- abzählbar, diskrete Räume, euklidische Räume $\mathbb{R}^d$
- $C([0,1]) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ stetig} \}$ bzgl. der Supremumsnorm

Satz 1.4 (Existenzsatz von Daniel und Kolmogorov)

Sei $(E,\mathcal{E})$ ein polnischer Raum und $\{Q_J : J \subseteq I \text{ endlich}\}$ eine konsistente Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Dann existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(E^I, \mathcal{E}^{\otimes I})$ mit der Eigenschaft

$$Q_J = Q \circ \pi_J^{-1} \qquad \forall\, J \subseteq I \text{ endlich} \qquad (*)$$

Beweis: siehe Klenke, Satz 14.36

Bemerkung 6: Die Konstruktion von Q beruht auf dem Satz von Carathéodory

- $\mathcal{Z}$ ist eine Algebra und damit insbesondere ein Semiring
- Der Nachweis, daß die Mengenfunktion Q definiert durch $(*)$ additiv ist, ist nicht allzu schwierig
- Zum Nachweis der σ-Subadditivität von Q verwendet man ein Kompaktheitsargument, wobei hierzu benutzt wird, daß E polnisch ist.

Korollar 1.5 Sei $(E, \mathcal{E})$ ein polnischer Raum. Weiterhin sei $(X_t)_{t \in I}$ ein stochastischer Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum $(E, \mathcal{E})$. Dann existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$, dessen endlich-dimensionale Verteilungen mit der gegebenen Familie

$$\{ \mathbb{P}_{X_J} \,,\ J \subseteq I \text{ endlich} \}$$

übereinstimmen.

Beweis: Nach Bemerkung 3 (i) bilden die endlich-dimensionalen Verteilungen des stochastischen Prozesses $(X_t)_{t \in I}$ eine konsistente Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Folglich ergibt sich die Aussage direkt aus Satz 1.4.

$\square$