

Stochastik I

12. Große Übung

Martin Dattge und Leonardo Vela

16.12.2020

Definition

Sind $\mu_1, \dots, \mu_n$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ so heißt das Bildmaß des Produktmaßes $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ unter der Abbildung

$$h_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n,$$

Faltung von $\mu_1, \dots, \mu_n$. Man schreibt

$$(\mu_1 * \dots * \mu_n)(B) := (\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n)(h_n^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Summen von unabhängigen Zufallsvariablen

Seien $X_1, \dots, X_n$ **unabhängige** Zufallsvariablen. Dann gilt für die Verteilung der **Summe** dieser Zufallsvariablen

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \in B) &= \mathbb{P}(h_n(X_1, \dots, X_n) \in B) \\ &= \mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in h_n^{-1}(B)) \\ &= \mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)}(h_n^{-1}(B)) \\ &= (\mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n})(h_n^{-1}(B)) \\ &= (\mathbb{P}_{X_1} * \dots * \mathbb{P}_{X_n})(B),\end{aligned}$$

wobei B eine Menge aus $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sei. Die Faltung der Verteilungen von **unabhängigen** Zufallsvariablen ist also genau die Verteilung der **Summe** der entsprechenden Zufallsvariablen!

Für diskrete Verteilungen braucht man die Faltung eigentlich überhaupt nicht! Seien X_1, X_2 **unabhängige, diskrete** Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 + X_2 = a) &= \mathbb{P}(X_1 + X_2 = a, X_2 \in X_2(\Omega)) \\&= \mathbb{P}\left(X_1 + X_2 = a, X_2 \in \bigcup_{b \in X_2(\Omega)} \{b\}\right) \\&= \sum_{b \in X_2(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 + X_2 = a, X_2 = b) \\&= \sum_{b \in X_2(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = a - b, X_2 = b) \\&= \sum_{b \in X_2(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = a - b) \mathbb{P}(X_2 = b).\end{aligned}$$

Beispiel: Summe diskreter Verteilungen

Seien X_1, X_2 **unabhängige** Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{2}.$$

Dann gilt

$$X_2(\Omega) = \{1, 2\}$$

und somit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 4) &= \sum_{b \in X_2(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = 4 - b) \mathbb{P}(X_2 = b) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 4 - 1) \mathbb{P}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 4 - 2) \mathbb{P}(X_2 = 2) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 3) \mathbb{P}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 2) \mathbb{P}(X_2 = 2) \\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Für Summen unabhängiger stetiger Zufallsvariablen braucht man hingegen die Faltung. Diese liefert dann eine Regel für die Dichte der Zufallsvariable $X_1 + X_2$, wenn X_1, X_2 **unabhängige, stetige** Zufallsvariablen, denn nach der Vorlesung gilt für diese

$$f_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x-y)f_Y(y) \, dy.$$

Aufgabe 1

Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, sodass

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y = \mathcal{U}([0, 1]).$$

Berechne die Dichte der Zufallsvariable $Z := X + Y$ und den Erwartungswert von $\max\{1, Z\}$.

Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A, B Mengen aus $\mathcal{A}$ (also Ereignisse) mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Dann heißt

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A gegeben B .

- $\mathbb{P}(A|B)$ gibt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass A eintritt, falls B schon eingetreten ist.
- Für unabhängige Ereignisse folgt insbesondere $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

Aufgabe 2

Sei X eine $\mathbb{N}$ -wertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1) $X \sim \text{Geo}(p)$ für ein $p \in (0, 1)$, d.h. es gilt

$$\mathbb{P}_X = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} \delta_n.$$

2) Die Verteilung von X ist **gedächtnislos**, d.h. für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbb{P}(X = n + k | X > k) = \mathbb{P}(X = n).$$

3) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{P}(X = n + 1 | X > 1) = \mathbb{P}(X = n)$.

Hinweis: Für $q \in (0, 1)$ gilt

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$