

# Stochastik I

## 11. Große Übung

---

Martin Dattge und Leonardo Vela

09.12.2020

## Definition

Ist  $\mathbb{P}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , so heißt

$$F_{\mathbb{P}}(t_1, \dots, t_d) = \mathbb{P}((-\infty, t_1] \times \dots \times (-\infty, t_d])$$

für  $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}$  **multivariate Verteilungsfunktion von  $\mathbb{P}$** .

## Satz

Ist  $F$  die multivariate Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , so gelten:

- i)  $F: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$
- ii)  $\lim_{t_1 \rightarrow -\infty} F(t_1, \dots, t_d) = \lim_{t_2 \rightarrow -\infty} F(t_1, \dots, t_d) = \dots = \lim_{t_d \rightarrow -\infty} F(t_1, \dots, t_d) = 0,$
- iii)  $\lim_{t_1, t_2, \dots, t_d \rightarrow \infty} F(t_1, \dots, t_d) = 1,$
- iv)  $F$  ist in jeder Koordinate rechtsstetig,
- v)  $F$  ist rechtecksmonoton.

- Mit dem Fortsetzungssatz von Carathéodory und dem Hauptsatz über Dynkin-Systeme existiert zu jeder multivariaten Verteilungsfunktion auch wieder ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ .

## Definition

Eine Funktion  $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **rechtecksmonoton**, falls für  $t^1 \leq t^2 \in \mathbb{R}^d$  (d.h.  $t_k^1 \leq t_k^2, \forall k \in \{1, \dots, d\}$ )

$$\Delta_{t^1}^{t^2} F := \sum_{i_1, \dots, i_d \in \{1, 2\}} (-1)^{i_1 + \dots + i_d} F(t_1^{i_1}, \dots, t_d^{i_d}) \geq 0$$

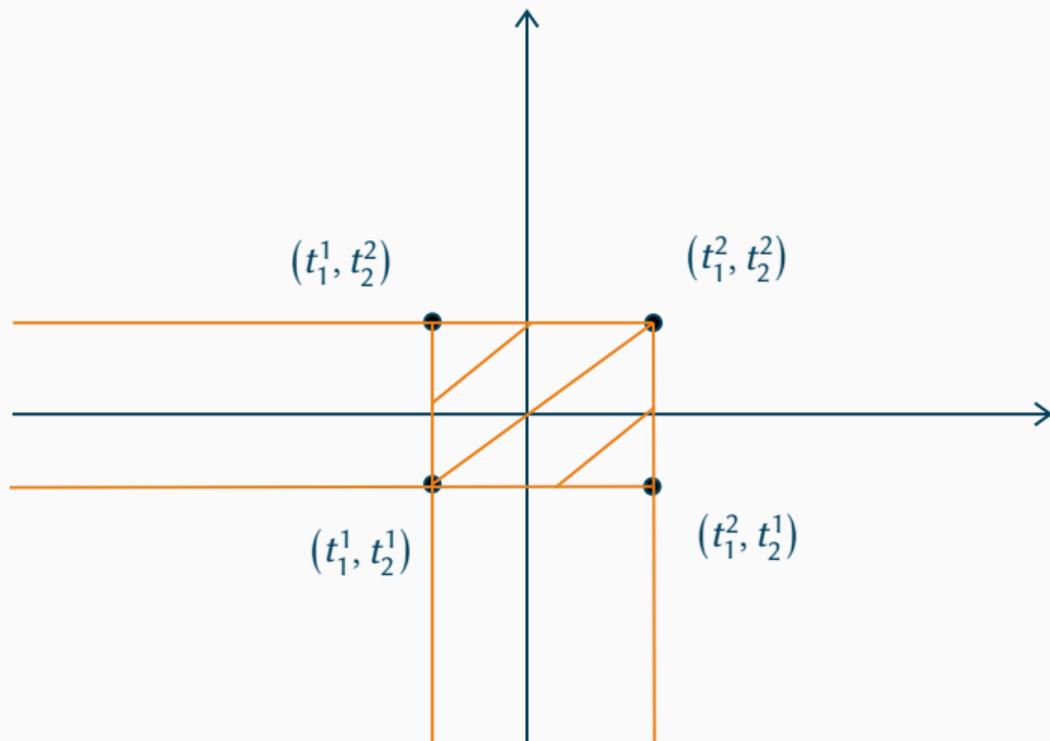
gilt.

- Die Rechteckmonotonie ist eine Verallgemeinerung der Monotonie von Verteilungsfunktionen. Für  $d = 1$  entspricht sie gerade der normalen Monotonie von Verteilungsfunktionen.
- Es gilt:  $\Delta_{t^1}^{t^2} F = \mathbb{P}_F((t_1^1, t_1^2] \times \dots \times (t_d^1, t_d^2])$ . Deshalb darf dieser Wert auch nicht negativ werden!

# Rechtseckmonotonie in $\mathbb{R}^2$

Für  $d=2$  entspricht die Rechtseckmonotonie gerade

$$F(t_1^2, t_2^2) - F(t_1^1, t_2^2) - F(t_1^2, t_2^1) + F(t_1^1, t_2^1) \geq 0, \quad \forall t^1 \leq t^2 \in \mathbb{R}^2.$$



Für den **Differenzoperator**  $\Delta_{t^1}^{t^2}$  gilt zudem für eine Funktion  $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  und  $t^1 \leq t^2 \in \mathbb{R}^d$ :

$$\begin{aligned}\Delta_{t^1}^{t^2} F &= \sum_{i_1, \dots, i_d \in \{1, 2\}} (-1)^{i_1 + \dots + i_d} F(t_1^{i_1}, \dots, t_d^{i_d}) \\ &= \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=1}^2 \cdots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_d} F(t_1^{i_1}, \dots, t_d^{i_d}) \\ &= \sum_{i_1=1}^2 (-1)^{i_1} \sum_{i_2=1}^2 (-1)^{i_2} \cdots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_d} F(t_1^{i_1}, \dots, t_d^{i_d}).\end{aligned}$$

## Aufgabe 1

Seien  $F_1, F_2, \dots, F_d: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  mit  $d \in \mathbb{N}$  Verteilungsfunktionen. Zeige, dass

$$F: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1], \quad (t_1, t_2, \dots, t_d)^T \rightarrow F(t_1, t_2, \dots, t_d) := F_1(t_1)F_2(t_2) \cdots F_d(t_d),$$

eine multivariate Verteilungsfunktion definiert.

## Definition

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Abbildung

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \omega \mapsto X(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \\ \vdots \\ X_d(\omega) \end{pmatrix},$$

heißt **Zufallsvektor**, falls sie  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -messbar ist.

- $X$  ist genau dann ein Zufallsvektor, wenn alle  $X_j: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  **Zufallsvariablen** sind, also wenn sie  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar sind.

## Definition

Das **Maß**

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

auf  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  heißt **Verteilung** des Zufallsvektors  $X$ .

- Um die **Verteilung** der Zufallsvariablen  $X_i, i \in \{1, \dots, d\}$ , zu berechnen nutzen wir folgende Gleichung

$$\mathbb{P}(X_i \in B) = \mathbb{P}(X_1 \in \mathbb{R}, X_2 \in \mathbb{R}, \dots, X_i \in B, \dots, X_d \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}_X(\mathbb{R} \times \dots \times B \times \dots \times \mathbb{R}), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

man nennt  $\mathbb{P}_{X_i}$  dann auch **eindimensionale Randverteilung von  $X_i$** .

## Definition

Seien  $X, Y$  Zufallsvariablen auf beliebigen Wahrscheinlichkeitsräumen. Dann heißen  $X$  und  $Y$  **identisch verteilt**, falls

$$F_X = F_Y$$

gilt.

Mit dem Hauptsatz über Dynkinsysteme gilt

$$F_X = F_Y \iff \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y,$$

weshalb die Definition über Verteilungsfunktionen hier ausreicht.

## Definition

Seien  $X_1, \dots, X_d$  Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Die Zufallsvariablen heißen dann **unabhängig**, falls

$$F_{(X_1, \dots, X_d)}(t_1, \dots, t_d) = F_{X_1}(t_1) \cdot \dots \cdot F_{X_d}(t_d)$$

für alle  $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}$  gilt.

Es gilt zudem für **unabhängige** Zufallsvariablen und messbare Funktionen  $f_1, \dots, f_d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_d \in B_d) &= \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdots \mathbb{P}(X_d \in B_d), \quad B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad i = 1, \dots, d, \\ \mathbb{E}[f_1(X_1) \cdots f_d(X_d)] &= \mathbb{E}[f_1(X_1)] \cdots \mathbb{E}[f_d(X_d)],\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung nur gilt, falls die Erwartungswerte existieren.

## Definition

Seien  $X, Y$  Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , sodass die Erwartungswerte  $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y], \mathbb{E}[XY]$  existieren. Dann heißt

$$\text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

**Kovarianz** von  $X$  und  $Y$ . Die **Korrelation** von  $X$  und  $Y$  ist dann, falls zudem  $\mathbb{V}(X), \mathbb{V}(Y) > 0$  gilt, definiert durch

$$\text{Cor}(X, Y) := \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}.$$

Insbesondere gilt

$$\text{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X).$$

- Eine **positive** Kovarianz wird so interpretiert, dass falls  $X$  einen **großen** (niedrigen) Wert annimmt,  $Y$  wahrscheinlich auch einen **großen** (niedrigen) Wert annimmt.
- Eine **negative** Kovarianz wird so interpretiert, dass falls  $X$  einen **großen** (niedrigen) Wert annimmt,  $Y$  wahrscheinlich einen **niedrigen** (großen) Wert annimmt.
- Sie sagt aber nichts über die Stärke dieser Beziehung aus, deshalb verwendet man oft die **Korrelation**, eine standardisierte Form der Kovarianz.

## Aufgabe 2

- a) Seien  $X, Y$  unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  für die die Kovarianz definiert ist. Zeige, dass

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

gilt.

- b) Seien  $X, Y$  unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Berechne

$$\text{Cov}(aX + bY, cX + dY), \quad \text{Cor}(aX + bY, cX + dY), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

- c) Zeige, dass im Allgemeinen für zwei Zufallsvariablen  $X, Y$  für die die Korrelation definiert ist,

$$|\text{Cor}(X, Y)| \leq 1$$

gilt.

Hinweis für c) : Hölder-Ungleichung