Stochastik I

10. Große Übung

Martin Dattge und Leonardo Vela

02.12.2020

Verteilungen von Zufallsvariablen

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B) \overset{\text{Not.}}{=} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

Verteilung von X.

- Hier wird die Messbarkeit von X wichtig, da wir dadurch wissen, dass $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt und somit $\mathbb{P}_X(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ wohldefiniert ist.
- $\mathbb{P}_X$ ist der push-forward (das Bildmaß) von X.
- Nach der Vorlesung ist $\mathbb{P}_X$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
  $\rightsquigarrow$ Verteilungsfunktionen

Verteilungsfunktionen von Zufallsvariablen

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$F_X \colon \mathbb{R} \to [0, 1], \quad t \mapsto F_X(t) := \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}_X((-\infty, t]),$$

Verteilungsfunktion von X.

Anwendung des Transformationssatzes

Satz (Transformationssatz)

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume, μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, $f\colon \Omega \longrightarrow \Omega'$ und $g\colon \Omega' \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Dann ist g μ_f-integrierbar genau dann, wenn $g \circ f$ μ-integrierbar ist, und falls eine dieser Eigenschaften erfüllt ist gilt

$$\int_\Omega g \circ f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega'} g \, \mathrm{d}\mu_f .$$

Also gilt für eine Zufallsvariable X (d.h. X messbare Funktion von Ω nach $\mathbb{R}$) und eine messbare Funktion $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[g(X)] := \int_\Omega g(X(\omega)) \, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} g(x) \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x),$$

wenn $g \circ X$ $\mathbb{P}$-integrierbar oder g $\mathbb{P}_X$-integrierbar ist. Es reicht also aus die Verteilung der Zufallsvariablen X zu kennen!

Markov- und Tschebycheffungleichung

Satz (Markov- und Tschebycheffungleichung)

Sei X eine Zufallsvariable, dann gelten für $a > 0$ folgende Ungleichungen

i) Für $h : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ wachsend gilt

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[h(X)]}{h(a)} \qquad \text{(Markovungleichung)}$$

ii)

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{a^2} \qquad \text{(Tschebycheffungleichung)}$$

Aufgabe 1

a) Sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Zeige, dass

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)]$$

für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt.

b) Zeige, dass mit $a > 0$ und $h : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ wachsend

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[h(X)]}{h(a)}$$

gilt.

Nützliche Rechenregeln

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $g : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar, so gelten:

i) Ist X absolutstetig mit Dichte f, so gilt

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

ii) Ist X diskret und nimmt die Werte $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ mit Wahrscheinlichkeiten $p_1, \dots, p_N$ an, so gilt

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{k=1}^{N} g(a_k)p_k$$

Für die Varianz gilt die sogenannte Verschiebungsformel

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Mit dieser reicht es aus die ersten beiden Momente von X zu berechnen um $\mathbb{V}[X]$ zu berechnen.

Momenterzeugende Funktion von Zufallsvariablen

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$\mathcal{M}_X \colon D \mapsto [0, \infty), \quad t \mapsto \mathcal{M}_X(t) := \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}]$$

momenterzeugende Funktion von X, wobei

$$D := \{t \in \mathbb{R} : \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}] < \infty\}.$$

- Es gilt immer $D \neq \emptyset$, da $\mathcal{M}_X(0) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{0X}] = \mathbb{E}[1] = 1 < \infty$.
- Falls ein $\epsilon > 0$ existiert, mit $(-\epsilon, \epsilon) \subseteq D$, so gilt nach der Vorlesung

  $$\mathbb{E}[X^k] = \mathcal{M}_X^{(k)}(0)$$

  wobei $\mathcal{M}_X^{(k)}(0)$ die $k-$te Ableitung an der Stelle 0 ist.
  $\rightsquigarrow$ Deshalb momenterzeugende Funktion.

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum auf dem die Zufallsvariablen $X \sim \mathrm{Ber}(p_1)$, $Y \sim \mathrm{Geo}(p_2)$ mit $p_1, p_2 \in (0, 1)$ gegeben seien. Also gilt

$$\mathbb{P}_X = p_1\delta_1 + (1 - p_1)\delta_0, \quad \mathbb{P}_Y = p_2 \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p_2)^{k-1}\delta_k.$$

Berechne die momenterzeugenden Funktionen von X und Y und bestimme damit die Erwartungswerte und die Varianzen von X und Y.