Stochastik I

6. Große Übung

Martin Dattge, Leonardo Vela

04.11.2020

Das Lebesgue-Integral: Einfache Funktionen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{E} := \{f : f \text{ einfache Funktion}\}$ bzw. $\mathcal{E}^+ := \{f : f \text{ einfache positive Funktion}\}$. Hierbei heißt eine Funktion einfach, falls $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}$ und $A_1, \ldots, A_n$ existieren, sodass die A_k paarweise disjunkt sind mit $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$ und

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Für ein $f \in \mathcal{E}^+$ ist dann das Lebesgue-Integral definiert durch

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k).$$

Das Lebesgue-Integral: Nichtnegative, messbare Funktionen

Für eine nichtnegative, messbare Funktion $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ definieren wir dann das Lebesgue-Integral durch

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu : \mathrm{g} \text{ einfach}, 0 \leq g \leq f \right\}.$$

Dieser Ausdruck ist erstmal unhandlich, aber direkt wohldefiniert.
Nach der Vorlesung existiert zu jeder nichtnegativen messbaren numerischen Funktion f eine Folge von einfachen Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \uparrow f$ punktweise und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu.$$

Diese äquivalente Darstellung ist deutlich praktischer für Beweise.

Das Lebesgue-Integral: Integrierbare Funktionen

Sei $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ eine messbare numerische Funktion. Dann sind nach der Vorlesung $f^+ := \max\{f, 0\}, f^- := -\min\{f, 0\}$ messbare und nichtnegative Funktionen. Falls

$$\int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\mu < \infty, \quad \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\mu < \infty,$$

gilt, heißt f integrierbar und das Lebesgue-Integral für eine integrierbare Funktion f ist definiert durch

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu := \int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\mu.$$

Wir schränken uns hierbei auf integrierbare Funktionen ein, um den Fall "$\infty - \infty$" zu vermeiden.

Zusammen: Die Gebetsmühle der Integrationstheorie

Um eine Aussage für eine integrierbare Funktion f zu zeigen, kann man also wie folgt vorgehen:

1. Zeige die Aussage für positive einfache Funktionen $f \in \mathcal{E}^+$.
2. Zeige die Aussage für nichtnegative, messbare numerische Funktionen f.
   Meist nutzt man hierfür Proposition 3.1.6.: Es existiert für jede nichtnegative messbare Funktion eine Folge von positiven einfachen Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \uparrow f$.
   Für die $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ darf die zu zeigende Aussage wegen 1. bereits benutzt werden.
3. Zeige die Aussage mit der üblichen Zerlegung $f = f^+ - f^-$ auch für allgemeine messbare numerische Funktionen.
   Da Positiv- und Negativteil per Definition nichtnegative, messbare numerische Funktionen sind, darf für beide Teile die zu zeigende Aussage wegen 2. bereits benutzt werden.

Aufgabe 1

Seien der messbare Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, μ ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit

$$\mu := \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k$$

gegeben. Zeige, dass für eine integrierbare Funktion $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$

$$\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

gilt.

Aufgabe 2

Sei μ ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Zeige, dass für jedes $\lambda > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\mu((a,\infty)) \leq \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} \mathrm{d}\mu(x)}{e^{\lambda a}}.$$