Prof. Dr. Leif Döring Stochastik I

12. Übung

Für dieses Blatt werden Kenntnisse aus den Vorlesungen 1 bis 24 vorausgesetzt.

1. Summen von Zufallsvariablen.

a) Seien $X \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$, $Y \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$ unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\alpha_1, \alpha_2, \beta > 0$. Zeige, dass

$$X + Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$$

gilt. *(3 Punkte)*

b) Seien nun $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $Y \sim \text{Bin}(m, p)$ wieder unabhängige Zufallsvariablen mit $n, m \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$. Zeige mit der diskreten Faltungsformel, dass

$$X + Y \sim \text{Bin}(n + m, p)$$

gilt.
Hinweis: Nutzt die Konvention $\binom{n}{k} := 0$ für $k > n$ und die Vandermondesche Identität

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{n}{k-l} \binom{m}{l}.$$

(5 Punkte)

2. Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung.

Sei $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ für $\lambda > 0$. Zeige, dass die Exponentialverteilung gedächtnislos ist, d.h. dass

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t) \quad \forall s, t \geq 0$$

gilt. *(4 Punkte)*

Diese Eigenschaft kann folgendermaßen interpretiert werden: Stellt euch vor, ihr wollt die Wartezeit in einem Bediensystem modellieren. Die Wartezeit soll gedächtnislos sein, d.h. es spielt keine Rolle, ob ihr seit 3 Minuten oder bereits seit 15 Minuten wartet, die Verteilung der verbleibenden Wartezeit ist gleich. Wir haben gezeigt, dass die Exponentialverteilung eine mögliche Verteilung für die Modellierung ist. Es kann sogar gezeigt werden, dass sie die einzige nichtnegative, stetige Verteilung ist, die diese Eigenschaft erfüllt.

3. Weiteres zur Unabhängigkeit.

a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeige, dass die paarweise Unabhängigkeit von $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$ im Allgemeinen nicht die Unabhängigkeit von A_1, A_2, A_3 impliziert.
Hinweis: Ihr könnt (aber müsst nicht) das folgende Beispiel nutzen

$$\Omega = \{112, 121, 211, 222\}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega),$$
$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{4}, \quad \forall \omega \in \Omega,$$

und die Ereignisse $A_i := \{1 \text{ an } i\text{-ter Stelle}\}, i = 1, 2, 3.$ *(2 Punkte)*

b) Seien X, Y, Z Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeige, dass im Allgemeinen aus der paarweisen Unabhängigkeit von X, Y, Z nicht die Unabhängigkeit von X, Y, Z folgt. *(3 Punkte)*

c) Seien X, Y Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeige, dass die Unkorreliertheit von X und Y im Allgemeinen nicht die Unabhängigkeit von X, Y impliziert. Ihr könnt das folgende Beispiel nutzen:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega),$$
$$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{2}{5} \quad \text{für } i = 1, 2, \quad \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{10} \quad \text{für } i = 3, 4.$$

Die Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ nehmen folgende Werte an:

$$X(\omega_1) = 1,\ X(\omega_2) = -1,\ X(\omega_3) = 2,\ X(\omega_4) = -2,$$
$$Y(\omega_1) = -1,\ Y(\omega_2) = 1,\ Y(\omega_3) = 2,\ Y(\omega_4) = -2.$$

(3 Punkte)

4. Konvergenz von Zufallsvariablen.

Sei $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit

$$X_n = (-1)^n X, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeige, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen X konvergiert. *(3 Punkte)*

b) Zeige, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht stochastisch gegen X konvergiert. *(4 Punkte)*

c) Zeige, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht fast sicher gegen X konvergiert. *(3 Punkte)*

5. Zusatzaufgabe.

Hier könnt ihr noch ein paar Punkte für die Zulassung sammeln.
Sei $\alpha > 0$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $X_1 = 1$ und

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}, \quad \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^\alpha}, \quad \forall n \geq 2.$$

a) Für welche $\alpha > 0$ konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch gegen 1? *(3 Zusatzpunkte)*

b) Sei $p \geq 1$. Für welche $\alpha > 0$ konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im p-ten Mittel gegen 1? *(3 Zusatzpunkte)*

c) Für welche $\alpha > 0$ konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen 1? *(3 Zusatzpunkte)*

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 29. November 2023, 10:00 Uhr, in Ilias hochzuladen.