Prof. Dr. Leif Döring
Felix Schamoni

Stochastik I

14. Übung

Dieses Blatt besteht vollständig aus Zusatzaufgaben zur Wiederholung und Vorbereitung für die Klausur. Falls ihr die Zulassung schon erreicht habt, ladet eure Lösungen bitte auch nicht hoch. Diejenigen, die noch ein paar Punkte brauchen, können die auf diesem Blatt noch sammeln. In dem Fall ladet eure Lösungen bitte bis **Mittwoch, den 14. Dezember 2022 ,10:00 Uhr, in Ilias** hoch.

1. Definitionen, Vorraussetzungen und Sätze

a) Was besagt der Hauptsatz über Dynkin-Systeme? *(5 Zusatzpunkte)*

b) Was sind die 4 Eigenschaften einer Verteilungsfunktion? *(5 Zusatzpunkte)*

c) Was besagt der abstrakte Transformationssatz? *(5 Zusatzpunkte)*

d) Gebe die Vorraussetzungen für den Satz von Fubini an. *(5 Zusatzpunkte)*

e) Was ist die Definition unabhängiger Zufallsvariablen? *(5 Zusatzpunkte)*

2. Erzeugte σ-Algebren und Dynkin-Systeme

a) Zeige, dass für beliebiges $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

$$\sigma(d(\mathcal{E})) = d(\sigma(\mathcal{E}))$$

gilt. *(5 Zusatzpunkte)*

b) Zeige oder widerlege, dass für zwei Dynkin-Systeme $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ die Vereinigung $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ ein Dynkin-System ist. *(5 Zusatzpunkte)*

c) Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$, wobei f nur die n unterschiedlichen Werte $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ annimmt. Gebe (mit Begründung) eine allg. Formel für $|\sigma(f)|$, also die Anzahl der Mengen in $\sigma(f)$, an. *(6 Zusatzpunkte)*

3. Aufgaben zum Lebesgue-Integral

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (-x^2 + 1) \cdot \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$.

a) Finde eine monoton wachsende Folge von einfachen Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}^+$, sodass $f_n \uparrow f$ und skizziere f_n für $n \in \{1, 2, 3\}$. *(5 Zusatzpunkte)*

b) Berechne $\int_0^1 f_n d\lambda$. *(5 Zusatzpunkte)*

c) Begründe, warum der Satz über monotone Konvergenz (für einfachen Funktionen) angewandt werden kann und zeige somit $\int_0^1 f d\lambda = \frac{1}{2}$. *(5 Zusatzpunkte)*

d) Finde eine monoton wachsende Folge von elementaren Funktionen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}^+$, sodass $g_n \uparrow g$ und skizziere g_n für $n \in \{1, 2, 3\}$.

(5 Zusatzpunkte)

e) Berechne $\int_0^1 g_n d\lambda$.

(5 Zusatzpunkte)

f) Begründe, warum der Satz über monotone Konvergenz (für einfachen Funktionen) angewandt werden kann und zeige somit $\int_{-1}^1 g d\lambda = \frac{4}{3}$.

(5 Zusatzpunkte)

4. Erwartungswerte, Varianzen und Momente

a) Sei $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ für ein $\lambda > 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Berechne Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariable $aX^2 + b$. *(5 Zusatzpunkte)*

b) Sei $Y \sim \text{Bin}(n, p)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$. Berechne die momenterzeugende Funktion und alle n-ten Momente von Y. *(5 Zusatzpunkte)*

c) Berechne die Varianz von $Z \sim \text{Pareto}(k, a)$ (siehe Sammlung von Verteilungen im Appendix des Skriptes) für $a > 0$ und $k > 2$. *(5 Zusatzpunkte)*

5. Aufgaben zu Transformationen und Faltungen Seien $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \sim \mathcal{U}[0, 1]$ verteilt.

a) Berechne die Dichtefunktion der Zufallsvariable $-X_2$. *(52 Zusatzpunkte)*

b) Berechne die Dichtefunktion der Zufallsvariable $X_1 - X_2$. *(5 Zusatzpunkte)*

c) Berechne die Dichtefunktion der Zufallsvariable $(X_1 - X_2)^2$. *(5 Zusatzpunkte)*

d) Berechne die Dichtefunktion der Zufallsvariable $(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2$. *(5 Zusatzpunkte)*

e) Berechne die Dichtefunktion der Zufallsvariable $\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}$.

(5 Zusatzpunkte)

f) Seien $X, Y \sim \mathcal{U}[0, 1]^2$ verteilt. Berechne den Erwartungswert der Zufallsvariable $\|X - Y\|_2$.

(5 Zusatzpunkte)

6. Noch mehr zum Schwachen Gesetz der großen Zahlen

Zeige, dass für die Annahme $X_1, X_2, ...$ paarweise unkorreliert und $\mathbb{V}(X_k) \leq c$ für alle $k \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}^+$ ebenfalls die stochastische Konvergenz des schwachen Gesetz der großen Zahlen gilt.

(5 Zusatzpunkte)

7. Fast sichere Eindeutigkeit von Limites in Wahrscheinlichkeit.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum auf dem die Zufallsvariablen X, Y und die Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_n \in \mathbb{N}$ gegeben seien. Zeige die folgenden Aussagen:

a) Für alle $\epsilon > 0$ gilt

$$\{X + Y > \epsilon\} \subseteq \left\{X > \frac{\epsilon}{2}\right\} \cup \left\{Y > \frac{\epsilon}{2}\right\}.$$

(5 Zusatzunkte)

b) Falls

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \quad \text{und} \quad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} Y,$$

gilt, folgt

$$\mathbb{P}(X = Y) = 1.$$

(5 Zusatzpunkte)