FAKULTÄT FÜR WIRTSCHAFTSINFORMATIK
UND WIRTSCHAFTSMATHEMATIK

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Prof. Dr. Leif Döring
Felix Schamoni

Stochastik I

13. Übung

Für dieses Blatt werden Kenntnisse aus den Vorlesungen 1 bis 26 vorausgesetzt.

1. Zum Zusammenhang der Konvergenzarten.

In dieser Aufgabe geht es um einzelne Teile des Beweises von Satz 4.5.11.

a) **Konvergenz in $\mathcal{L}^p$ $\Rightarrow$ Konvergenz in $\mathcal{L}^q$ für** $q \leq p$:
Warum definieren wir $r' = \frac{r}{r-1}$? Begründe mit Rechnung. *(3 Punkte)*

b) **Fast sichere Konvergenz $\Rightarrow$ Stochastische Konvergenz**:
Bringe die Argumente, die im Beweis verwendet werden, in die richtige Reihenfolge. *Hinweis: Zwei der Argumente müssen zweimal verwendet werden.*

A: Definition für Stetigkeit aus der Analysis
B: De Morgan für Mengen
C: Voraussetzung ($X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X, \quad n \to \infty$)
D: Stetigkeit von Maßen
E: Wahrscheinlichkeiten sind ≤ 1
F: Notation aus Def. 4.1.3
G: Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses
H: Monotonie von Maßen *(4 Punkte)*

c) **Stochastische Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz in Verteilung**:
Im ersten Schritt des Beweises wird aus der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit von f (4.4) und der Definition von $A_n = \{\omega\colon |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \delta\}$ gefolgert, dass

$$\mathbb{E}[|f(X_n) - f(X)| \cdot \mathbf{1}_{A_n^C}] \leq \mathbb{E}[\varepsilon \mathbf{1}_{A_n^C}]$$

Begründe in Worten, warum diese Ungleichung gilt. *Hinweis: Vorlesung anschauen.*

(3 Punkte)

2. Noch mehr Konvergenz von Zufallsvariablen.

Seien $U_1, U_2, \ldots$ unabhängige, auf [0,1] gleichverteilte Zufallsvariablen, und sei

$$X_n = \min(U_1, \ldots, U_n).$$

a) Zeige $X_n \xrightarrow{P} 0$, $n \to \infty$. *(8 Punkte)*

b) Berechne die Verteilungsfunktion von X_n. *(8 Punkte)*

c) Zeige $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} 0$, $n \to \infty$. *(8 Punkte)*

d) Gilt auch $X_n \xrightarrow{f.s.} 0$, $n \to \infty$? (*Hinweis: Borel-Cantelli Lemma*) *(8 Punkte)*

3. Mehr zum schwachen Gesetz der großen Zahlen.

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise unkorrelierten Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{E}[X_n^2] < \infty,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{und} \quad \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Zeige

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbb{E}[X_k]) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

(16 Punkte)

4. Limes superior und inferior von Mengenfolgen.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in $\mathcal{A}$. Zeige:

a) $\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$. *(8 Punkte)*

b) $(\liminf_{n\to\infty} A_n)^C = \limsup_{n\to\infty} A_n^C$. *(8 Punkte)*

c) $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = \mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega$. *(8 Punkte)*

d) $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = \mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega$. *(8 Punkte)*

5. Das starke Gesetz der großen Zahlen mit zweiten oder dritten Momenten?

Was läuft beim Beweis des starken Gesetzes der großen Zahlen schief, wenn man ihn mit zweiten oder dritten Momenten durchführt (anstatt mit vierten)? *(30 Zusatzpunkte)*

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 07. Dezember 2022, 10:00 Uhr, in Ilias hochzuladen.