Fakultät für Wirtschaftsinformatik
und Wirtschaftsmathematik

Universität Mannheim

Prof. Dr. Leif Döring
Felix Schamoni

Stochastik I

# 11. Übung

*Für dieses Blatt werden Kenntnisse aus den Vorlesungen 1 bis 23 vorausgesetzt.*

**1. Summen von unabhängigen Poissonverteilungen.**

Seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $X_k \sim \mathrm{Poi}(\lambda_k)$. Berechne die Verteilung von $Z \coloneqq \sum_{k=1}^n X_k$.
*Hinweis: Das Ergebnis ist*

$$Z \sim \mathrm{Poi}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right).$$

*Ihr könnt entweder momenterzeugende Funktionen oder Faltung benutzen.*

*(5 Punkte)*

**2. Unabhängigkeit und Unkorreliertheit.**

Seien $X, Y$ unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, sodass

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = p \in (0, 1), \quad \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - p.$$

a) Sind die Zufallsvariablen $X + Y$ und $X - Y$ unkorreliert? *(3 Punkte)*

b) Sind die Zufallsvariablen $X + Y$ und $X - Y$ unabhängig? *(3 Punkte)*

*Hinweis: Definition benutzen und Rechnen.*

**3. Rechnen mit Zufallsvektoren.**

Sei $(X, Y)$ ein absolutstetiger Zufallsvektor auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit gemeinsamer Dichte

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to [0, \infty), \quad f(x, y) = \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y} \mathbb{1}_{(0,\infty)^2}(x, y).$$

Bestimme die Randdichte von $Y$ und berechne $\mathbb{E}[XY]$.

*(6 Punkte)*

**4. Dichten von Zufallsvektoren.**

Sei $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$ eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) Zeige, dass

$$A \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x = y\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

gilt. Zeige außerdem, dass $\lambda^2(A) = 0$ gilt, wobei $\lambda^2$ das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ bezeichnet.

*(4 Punkte)*

b) Folgere aus a), dass der Zufallsvektor $(X, X)$ keine Dichte hat. *(2 Punkte)*

**5. Exponentialverteilungen und Gleichverteilungen.**

Seien $X, Y$ unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}_X \sim \mathbb{P}_Y \sim \text{Exp}(1)$. Zeige, dass $\frac{X}{X+Y}$, siehe Vorlesungsbeispiel, gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]$ ist.

*(7 Punkte)*

**Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 23. November 2022, 10:00 Uhr, in Ilias hochzuladen.**