Prof. Dr. Leif Döring
Felix Schamoni

Stochastik I

# 10. Übung

*Für dieses Blatt werden Kenntnisse aus den Vorlesungen 1 bis 21 vorausgesetzt.*

## 1. Fubini.

Zeige, dass für eine Zufallsvariable $X \geq 0$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

$$\mathbb{E}[X^r] = \int_0^\infty r t^{r-1} \mathbb{P}(X > t) \, \mathrm{d}t$$

für alle $r \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ gilt. *(4 Punkte)*

*Hinweis: Fangt mit der rechten Seite an und schreibt die Wahrscheinlichkeit als Integral.*

## 2. Die Borelsche $\sigma$-Algebra auf $\mathbb{R}^d$.

Die Borelsche $\sigma$-Algebra auf $\mathbb{R}^d$ ist definiert durch

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma(\{B_1 \times \cdots \times B_d : B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ \forall k \in \{1, \ldots, d\}\}).$$

a) Zeige, dass das Mengensystem

$$\mathcal{E}_1 := \{O \subset \mathbb{R}^d \mid O \text{ offen}\}$$

ein Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ist.

*(5 Punkte)*

b) Zeige, dass falls $\mathcal{E}$ ein Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist (d.h. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E})$), der eine Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ enthält, sodass $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \mathbb{R}$ gilt,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\{E_1 \times \cdots \times E_d : E_k \in \mathcal{E} \ \forall k \in \{1, \ldots, d\}\})$$

folgt.

*(6 Punkte)*

Wir haben also gezeigt, dass z.B. die folgenden Mengensysteme ein Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ sind:

i) $\mathcal{E}_2 := \{(-\infty, t_1] \times ... \times (-\infty, t_d] \mid t_i \in \mathbb{R}\}$.

ii) $\mathcal{E}_3 := \{(a_1, b_1] \times ... \times (a_d, b_d] \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$.

**3. Multivariate Dichtefunktionen.**

Sei $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ eine multivariate Dichtefunktion, das heißt:

i) $f$ ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar,

ii) $f \geq 0$,

iii) $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Zeige, dass

$$F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad (t_1,\dots,t_d)^T \mapsto F(t_1,\dots,t_d) := \int_{(-\infty,t_1]\times(-\infty,t_2]\times\cdots\times(-\infty,t_d]} f(x)\,\mathrm{d}x$$

eine multivariate Verteilungsfunktion definiert.

*Hinweis: MCT, DCT.* *(9 Punkte)*

**4. Erwartungswerte auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.**

Seien $X_1, X_2 \sim \mathcal{U}([0,1])$ unabhängige Zufallsvariablen.

a) Berechne $\mathbb{E}[X_1^3 \cdot X_2]$. *(3 Punkte)*

b) Berechne $\mathrm{Cov}(-X_1 + 3, X_1)$. *(3 Punkte)*

**5. Mehr zur Jensen-Ungleichung (Zusatzaufgabe).**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. In der Vorlesung wurde bereits die Jensen-Ungleichung gezeigt, die besagt, dass für eine Zufallsvariable $X$ mit $\mathbb{E}[|X|], \mathbb{E}[|f(X)|] < \infty$ folgende Ungleichung gilt:

$$f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)].$$

Wir wollen zwei Spezialfälle beweisen, die immer wieder genutzt werden.

a) Zeige die Jensen-Ungleichung in Summenform: Seien $\lambda_i \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Dann gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

für $x_i \in \mathbb{R}$. *(4 Zusatzpunkte)*

b) Zeige die Jensen-Ungleichung in Integralform: Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(g(x))\,dx.$$

*(4 Zusatzpunkte)*

**Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 16. November 2022, 10:00 Uhr, in Ilias hochzuladen.**