Prof. Dr. Leif Döring
Felix Schamoni

Stochastik I

9. Übung

Für dieses Blatt werden Kenntnisse aus den Vorlesungen 1 bis 19 vorausgesetzt.

1. Zu den neuen Definitionen.

a) Welche Bestandteile umfasst ein stochastisches Modell und welches konkrete stochastische Modell passt für jede beliebige Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion F?

b) Welche Definitions- und Zielmenge (nicht mit dem Bild verwechseln) haben jeweils die Zufallsvariable X, die Verteilung der Zufallsvariablen X und die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X per Definition?

c) Für Erwartungswert und weitere Momente müssen wir Ausdrücke der Form $\mathbb{E}[g(X)]$ berechnen, $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.

   i) Wie ist der Ausdruck $\mathbb{E}[g(X)]$ definiert?

   ii) Welche andere Form bekommen wir durch den Transformationssatz dazu?

   iii) Welche Rechenregeln benutzen wir dann, um Erwartungswerte von absolutstetigen, bzw. diskreten Zufallsvariablen zu berechnen?

(Je 1 Punkt)

2. Varianz.

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeige:

a) X ist integrierbar, das heißt $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, *(2 Punkte)*

b) $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$, *(2 Punkte)*

c) $\mathbb{V}[X + a] = \mathbb{V}[X]$, *(1 Punkt)*

d) $\mathbb{V}[aX] = a^2\mathbb{V}[X]$, *(1 Punkt)*

e) $\mathbb{V}[X] = 0 \iff \exists c \in \mathbb{R} : X = c$, $\mathbb{P}$-fast sicher. Was ist c? *(3 Punkte)*

3. Erwartungswerte.

Seien X und Y Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, wobei X diskret gleichverteilt auf $\{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, sei und Y die Dichte $f(y) = c \cdot \sin(y)\mathbb{1}_{[0,\pi]}(y)$, $c \in \mathbb{R}$ habe. Es gilt also

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{n}, \;\; i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \mathbb{P}(Y \in B) = \int_B c\sin(y)\mathbb{1}_{[0,\pi]}(y)dy, \;\; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

a) Berechne $\mathbb{E}[X], \mathbb{V}[X]$ und $\mathcal{M}_X$. *(3 Punkte)*

b) Bestimme c und berechne $F_Y, \mathbb{E}[Y]$ und $\mathcal{M}_Y$. *(4 Punkte)*

4. Mit den neuen Begriffen spielen.

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

i) X ist eine diskrete Zufallsvariable, d.h. F_X ist eine diskrete Verteilungsfunktion.

ii) $\mathbb{P}_X$ ist ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß. Das heißt, dass $\mathbb{P}_X$ eine Summe von Diracmaßen ist (siehe Beispiel 1.4.7.).

iii) Es existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,1]$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$, sodass für jede messbare, positive Funktion $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(a_n)p_n$$

gilt. *(4 Punkte)*

5. Die Gamma-Verteilung.

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{P}_X(B) = \int_B \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\,\mathrm{d}x, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

für $\alpha, \beta > 0$. Dann heißt X eine Gamma-verteilte Zufallsvariable und man schreibt

$$X \sim \Gamma(\alpha, \beta).$$

Berechne den Erwartungswert, die Varianz und die momenterzeugende Funktion von X.

(7 Punkte)

Hinweis: Hierbei bezeichnet

$$\Gamma\colon (0,\infty) \to (0,\infty), \quad x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

die Gammafunktion. Für diese gilt insbesondere $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \alpha > 0$.

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 09. November 2022, 10:00 Uhr, in Ilias hochzuladen.