Prof. Dr. Leif Döring
Felix Schamoni

Stochastik I

8. Übung

Für dieses Blatt werden Kenntnisse aus den Vorlesungen 1 bis 17 vorausgesetzt.

1. Eine weder diskrete noch stetige Verteilungsfunktion.

Sei die Verteilungsfunktion

$$F\colon \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right)\right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x),$$

mit $\lambda > 0$ gegeben. Skizziere zunächst F und bestimme dann das mit F korrespondierende Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_F$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und dessen erstes Moment. *(6 Punkte)*

Hinweis: Da wir für gemischte Verteilungsfunktionen keine allgemeine Berechnungsformel für die Integrale haben, müsst ihr zuerst mit der Gebetsmühle eine Formel herleiten.

2. Eindeutigkeit von Grenzwerten in L^p (nicht $\mathcal{L}^p$!).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $p \geq 1$, sodass

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |f_n - f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |f_n - g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

für Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Zeige, dass

$$f = g \quad \mu\text{-fast überall}$$

gilt und folgere, dass Grenzwerte von Folgen in $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ eindeutig sind.

(7 Punkte)

3. Summen sind auch nur Integrale.

Sei $(a_{k,n})_{k,n\in\mathbb{N}}$ eine reellwertige Folge mit $a_{k,n} \geq 0$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass

$$\sum_{k=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty a_{k,n} = \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty a_{k,n}$$

gilt.

Hinweis: Fubini! *(6 Punkte)*

4. (Nicht-)Bedeutung von Nullmengen für Zufallsvariablen.

Sei $X_1 \sim \mathcal{U}((0,1))$ und $X_2 \sim \mathcal{U}([0,1])$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Das bedeutet,

$$X_1 \text{ hat Dichte } f = \mathbb{1}_{(0,1)}\,, \text{ es gilt also} \quad \mathbb{P}(X_1 \in B) = \int_B \mathbb{1}_{(0,1)}(x)dx, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

$$X_2 \text{ hat Dichte } f = \mathbb{1}_{[0,1]}\,, \text{ es gilt also} \quad \mathbb{P}(X_2 \in B) = \int_B \mathbb{1}_{[0,1]}(x)dx, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

a) Zeige, dass X_1 und X_2 identisch verteilt sind. *(2 Punkte)*

b) Sei $\lambda > 0$ beliebig. Definiere $Y_1 = -\frac{1}{\lambda}\log(X_1)$ und $Y_2 = -\frac{1}{\lambda}\log(X_2)$, wobei ihr $\log(0)$ auf einen beliebigen reellen Wert setzt. Zeige, dass Y_1 und Y_2 identisch verteilt sind. Was ist ihre Verteilung? *(3 Punkte)*

Die Aufgabe zeigt euch, warum man sagt, dass Nullmengen bei Zufallsvariablen keine Rolle spielen.

5. Neue Schreibweise, altes Spiel.

Betrachte folgendes Experiment: Wir werfen eine Münze sehr oft hintereinander hoch und beobachten, ob die Münze auf *Kopf* oder *Zahl* landet. Wir interessieren uns für das erste Auftreten von *Kopf*. Nun wollen wir dieses Experiment mathematisch modellieren: Gegeben sei also ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Die Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ beschreibe die Anzahl an Versuchen, bis die Münze das erste Mal auf *Kopf* landet. Die Verteilung $\mathbb{P}_X$ soll dabei der Geometrischen Verteilung mit Parameter $p = 0.5$ entsprechen. Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$\mathbb{P}(X = 1) \mathrel{\widehat{=}}$ "Die Münze landet beim ersten Wurf auf Kopf",

$\mathbb{P}(X \in (2, 4]) \mathrel{\widehat{=}}$ "Es werden mehr als 2, aber weniger oder genau 4 Versuche benötigt ",

$\mathbb{P}(X > 5) \mathrel{\widehat{=}}$ "Es werden mehr als 5 Versuche benötigt".

(6 Punkte)

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 02. November 2022, 10:00 Uhr, in Ilias hochzuladen.