Prof. Dr. Leif Döring
Felix Schamoni

Stochastik I

7. Übung

Für dieses Blatt werden Kenntnisse aus den Vorlesungen 1 bis 15 vorausgesetzt.

1. Zum Beweis der Hölder-Ungleichung (Satz 3.4.1).

a) Nach Voraussetzung sind f und g messbar. Im Beweis steht „Alle auftretenden Integranden sind messbar und nicht-negativ, also sind alle Integrale definiert." Gebe die Integranden an und begründe kurz, warum diese messbar und nicht-negativ sind. Welche Definition des Integrals wird somit also erfüllt? *(1 Punkt)*

b) Der weitere Beweis besteht aus zwei Teilen. Wodurch ergibt sich diese Zweiteilung? Beschreibe kurz, was im ersten und was im zweiten Teil gezeigt wird. Für welchen Teil benötigen wir die Voraussetzung, dass $1/p + 1/q = 1$ ist? *(1 Punkt)*

c) In der letzten Zeile des Beweises steht „Durchmultiplizieren ergibt die Höldersche Ungleichung." Rechne vor, was damit gemeint ist. *(1 Punkt)*

2. Nochmal k-te Momente und exponentielle Momente.

Seien $p \in (0,1), n \in \mathbb{N}, c \in (0,1)$ und der messbare Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, versehen mit den Wahrscheinlichkeitsmaßen

$$\mathbb{P}_1(B) := \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}\delta_k(B), \quad \mathbb{P}_2(B) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\delta_k(B),$$

$$\mathbb{P}_3(B) := \int_B \left(2\left(1 - \frac{1}{c}x\right) \mathbb{1}_{[0,c]}(x) + 2\left(\frac{1}{1-c}x - \frac{c}{1-c}\right) \mathbb{1}_{(c,1]}(x) \right) \mathrm{d}x,$$

für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gegeben. $\mathbb{P}_1$ ist das zugehörige Maß der geometrischen Verteilung und $\mathbb{P}_2$ das zugehörige Maß der Binomialverteilung.

a) Skizziere schemenhaft die Verteilung der Masse von $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ und $\mathbb{P}_3$. *(2 Punkte)*

b) Berechne die ersten Momente von $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$. *(4 Punkte)*

c) Berechne die k-ten Momente von $\mathbb{P}_3$ für $k \in \mathbb{N}$. *(3 Punkte)*

d) Berechne die exponentiellen Momente von $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$. *(3 Punkte)*

3. Konzentrationsungleichungen.

Sei der messbare Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gegeben, μ ein beliebiges Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $\mathbb{P}$ sei das Wahrscheinlichkeitsmaß der Normalverteilung mit Parametern $\mu = 0$ und $\sigma^2 > 0$, das heißt $\mathbb{P} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

a) Zeige, dass jede monotone Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist. *(2 Punkte)*

b) Zeige, dass für eine monoton wachsende, nichtnegative Funktion $h\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$

$$h(a)\mu([a,\infty)) \leq \int_{\mathbb{R}} h \,\mathrm{d}\mu$$

für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt. *(4 Punkte)*

c) Zeige, dass für $a > 0$

$$\mathbb{P}((-a,a)^C) \leq 2\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2}}{\mathrm{e}^{\beta a}}$$

für alle $\beta \geq 0$ gilt. *(2 Punkte)*

d) Folgere aus c), dass für $a > 0$

$$\mathbb{P}((-a,a)^C) \leq 2\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}$$

gilt und dies die obere Schranke aus c) minimiert.

Hinweis: Wenn es um Minima und Maxima geht, hilft Ableiten oft weiter. *(2 Punkte)*

4. Ein Gegebenbeispiel zum DCT.

Sei $\Omega = [0,1]$ und λ das Lebesguemaß auf $[0,1]$. Betrachte die Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ne^{-nx}.$$

a) Zeige, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Funktionen ist, die λ-fast überall gegen eine Funktion f konvergiert. Gebe die Funktion f an. *(2 Punkte)*

b) Zeige, dass

$$\int_\Omega f \, d\mu \neq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

(2 Punkte)

c) Warum widerspricht b) nicht dem Satz der dominierten Konvergenz? *(1 Punkt)*

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 26. Oktober 2022, 10:00 Uhr, in Ilias hochzuladen.