

## 6. Übung

Dieses Blatt bezieht sich auf die Vorlesungen 11,12 und 13.

### 1. Nullmengen und Monotonie des Lebesgue-Integrals.

Seien ein Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , eine Folge von  $\mu$ -Nullmengen  $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $\mu$ -integrierbare Funktionen

$$f, g: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

gegeben. Zeige oder widerlege:

- a)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$  ist auch eine  $\mu$ -Nullmenge. (1 Punkt)
- b)  $f \leq g \implies \int_{\Omega} f \, d\mu \leq \int_{\Omega} g \, d\mu$ . (1 Punkt)
- c)  $f \leq g$   $\mu$ -fast überall  $\implies \int_{\Omega} f \, d\mu \leq \int_{\Omega} g \, d\mu$ . (1 Punkt)
- d)  $f < g$   $\mu$ -fast überall  $\implies \int_{\Omega} f \, d\mu < \int_{\Omega} g \, d\mu$ . (1 Punkt)
- e)  $\int_{E_1 \cup E_2} f \, d\mu = \int_{E_1} f \, d\mu + \int_{E_2} f \, d\mu$ , falls  $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$  und  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . (1 Punkt)
- f)  $\int_{E_1} f \, d\mu \leq \int_{E_2} f \, d\mu$ , falls  $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$  und  $E_1 \subseteq E_2$ . (1 Punkt)
- g)  $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar und  $\int_{\Omega} f \, d\mu < \infty \implies f < \infty$   $\mu$ -fast überall. (2 Punkte)

*Hinweis: Schaut euch den Beweis des Satzes der Monotonen Konvergenz an für Aufgabe c).*

### 2. Monotone Konvergenz und Reihen.

Seien ein Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  und eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$f_n: \Omega \rightarrow [0, \infty]$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  gegeben. Zeige, dass

$$\int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu$$

gilt.

(4 Punkte)

### 3. Weiteres zu Nullmengen.

Seien  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\lambda$  das Lebesgue-Maß auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Zeige, dass  $f = g$   $\lambda$ -fast überall  $f = g$  auf ganz  $\mathbb{R}$  impliziert. (4 Punkte)

#### 4. Momente und exponentielle Momente.

Seien der messbare Raum  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  und das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mathbb{P}_1 := p\delta_1 + (1-p)\delta_0$$

gegeben. Dann heißt  $\mathbb{P}_1$  Bernoulli-Verteilung mit Parameter  $p \in (0, 1)$  (kurz  $\mathbb{P}_1 = \text{Ber}(p)$ ).

Seien zudem  $\mathbb{P}_2$  die Exponentialverteilung mit Parameter  $\lambda > 0$  (kurz  $\mathbb{P}_2 = \text{Exp}(\lambda)$ ),  $\mathbb{P}_3$  die Gleichverteilung auf dem Intervall  $[a, b]$  mit  $a < b \in \mathbb{R}$  (kurz  $\mathbb{P}_3 = \mathcal{U}([a, b])$ ),  $\mathbb{P}_4$  die Normalverteilung mit Parameter  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 > 0$  (kurz  $\mathbb{P}_4 = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ) und  $\mathbb{P}_5$  die Cauchy-Verteilung mit Parameter  $s > 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$  (kurz  $\mathbb{P}_5 = \text{Cauchy}(s, t)$ ).

- a) Berechne (und begründe, warum sie existieren) die  $k$ -ten Momente von  $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , also

$$\int_{\mathbb{R}} x^k d\mathbb{P}_i(x),$$

für  $i = 1, 2, 3$ .

(6 Punkte)

*Hinweis: Zeigt per vollständiger Induktion mit partieller Integration, dass  $\int_{\mathbb{R}} x^k d\mathbb{P}_2 = \frac{k!}{\lambda^k}$  gilt.*

- b) Berechne die exponentiellen Momente von  $\mathbb{P}_4$ , also

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\beta x} d\mathbb{P}_4(x)$$

für  $\beta \in \mathbb{R}$ .

(3 Punkte)

*Hinweis: Quadratische Ergänzung.*

- c) Warum ist das erste Moment von  $\mathbb{P}_5$  nicht definiert? (3 Punkte)
- d) Berechne die exponentiellen Momente von  $\mathbb{P}_2$ . Für welche  $\beta$  sind diese endlich? (2 Punkte)

**Die Lösungen sind Mittwoch, den 19. Oktober 2022, 10:00 Uhr, in Ilias hochzuladen.**