

5. Übung

1. Entwicklung des Lebesgue-Integrals.

- Das Lebesgue-Integral wird zunächst nur für wenige, dann für immer mehr Funktionen definiert. Nenne diese Definitionen (Nummer im Skript) und die entsprechenden Voraussetzungen an die Funktionen. Beschreibe, wie jede dieser Definitionen auf die vorherige aufbaut. (1 Punkt)
- Gib eine äquivalente Formulierung von Satz 3.1.6 und fasse in einem Satz zusammen, wie der zugehörige Beweis geführt wird. (1 Punkt)
- Mit der Einführung des Lebesgue-Integrals tauchen die Begriffe „wohldefiniert“ und „integrierbar“ auf. Beschreibe in eigenen Worten worauf sich diese Begriffe beziehen und was sie in diesem Zusammenhang bedeuteten. (1 Punkt)

2. Dichten und Verteilungsfunktionen.

Seien der messbare Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $a, b, s, t, \lambda \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\lambda, s > 0$ gegeben. Das Wahrscheinlichkeitsmaß mit der Verteilungsfunktion

$$F_1: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \frac{x-a}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) + \mathbb{1}_{(b,\infty)}(x),$$

heißt *Gleichverteilung auf $[a, b]$* und das Wahrscheinlichkeitsmaß mit der Verteilungsfunktion

$$F_2: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x),$$

heißt *Exponentialverteilung mit Parameter λ* . Sei zudem die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{s}{s^2 + (x-t)^2},$$

gegeben, welche die Dichtefunktion der *Cauchyverteilung mit Parameter s und t* bezeichnet.

- Finde die Dichtefunktionen der Exponentialverteilung mit Parameter λ , sowie der Gleichverteilung auf $[a, b]$. (4 Punkte)
- Gebe eine Dichtefunktion und die zugehörige Verteilungsfunktion an, sodass für das korrespondierende Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt :

$$\mathbb{P}((-\infty, 1)) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}([1, \infty)) = \frac{2}{3}.$$

(4 Punkte)

c) Zeige, dass f tatsächlich eine Dichtefunktion definiert und beschreibe den Effekt der Parameter s und t auf die Verteilung der Masse der Cauchyverteilung.

(3 Punkte)

d) Zeige, dass für alle $p > 1$ eine Konstante $C_p \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{C_p} x^{-p} \mathbb{1}_{[1, \infty)}(x),$$

eine Dichtefunktion definiert.

(3 Punkte)

3. Unstetigkeitsstellen von Verteilungsfunktionen.

Zeige, dass jede Verteilungsfunktion höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt.

(3 Punkte)

4. Integrierbarkeit messbarer Funktionen.

Sei der messbare Raum (Ω, \mathcal{A}) und eine Funktion

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben.

a) Nehme an, dass f messbar ist und zeige, dass f genau dann integrierbar ist, wenn $|f|$ integrierbar ist.

(3 Punkte)

b) Zeige, dass die Messbarkeit von f im Allgemeinen nicht äquivalent zur Messbarkeit von $|f|$ ist.

(3 Punkte)

5. Noch mehr zu Dirac-Maßen.

Seien eine Folge von reellen Zahlen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und das Maß

$$\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty], \quad B \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{x_n}(B),$$

auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ gegeben. Zeige, dass die messbaren Funktionen

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

genau dann μ -fast überall übereinstimmen, wenn

$$f(x_n) = g(x_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(4 Punkte)

Hinweis: Hierbei stimmen f und g μ -fast überall überein, falls

$$\mu(\{f \neq g\}) = 0$$

gilt.

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 12. Oktober 2022, 10:00 Uhr, in Ilias abzugeben.