

4. Übung

Für dieses Blatt werden Kenntnisse aus den Vorlesungen 1 bis 9 vorausgesetzt.

1. Eine wichtige Aussage mit einem schönen Beweis.

- a) Im Skript steht über der Proposition 2.1.4: „Zum Glück ist es wie im Kapitel zuvor, es reicht einen Erzeuger zu betrachten“. Welche Aussage des letzten Kapitels ist damit gemeint? Vervollständige diese Aussage entsprechend des folgenden Satzes:

Um ... auf einer σ -Algebra zu zeigen, genügt es ... auf einem ... Erzeuger zu zeigen.

- b) Formuliere einen analogen Satz zur Aussage aus Proposition 2.1.4.
c) Im Beweis von Proposition 2.1.4 wird $\mathcal{F}' = \mathcal{A}'$ durch die Kette

$$\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{E}') \subseteq \sigma(\mathcal{F}') = \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{A}'$$

gezeigt. Gib eine kurze Begründung für jedes „=“ und jedes „ \subseteq “.

- d) Unterteile die „ \Leftarrow “-Richtung des Beweises von Proposition 2.1.4 in drei aufeinander aufbauende Bausteine und beschreibe jeweils kurz deren Funktion.

(je 1 Punkt)

2. Messbare Funktionen.

Sei (Ω, \mathcal{A}) ein messbarer Raum und $(f_n, n \in \mathbb{N})$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen mit $f_n: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- a) Zeige, dass die für $\omega \in \Omega$ punktweise definierte Funktionen

$$g_1(\omega) := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(\omega), \quad g_2(\omega) := \liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n(\omega), \quad g_3(\omega) := \limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n(\omega),$$

messbar sind. (Die Ausdrücke sind wohldefiniert, da bei numerischen Funktionen auch die Werte $+\infty, -\infty$ erlaubt sind.)

(4 Punkte)

- b) Zeige, dass falls für jedes $\omega \in \Omega$ der Grenzwert

$$f(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)$$

in $\bar{\mathbb{R}}$ existiert, auch f eine messbare numerische Funktion ist.

(2 Punkte)

3. Eigenschaften messbarer Funktionen.

Seien die messbaren Räume $(\Omega, \mathcal{A}), (\Omega', \mathcal{A}'), (\Omega'', \mathcal{A}'')$ und die messbaren Funktionen

$$f: \Omega \rightarrow \Omega', \quad g: \Omega' \rightarrow \Omega''$$

gegeben.

a) Zeige, dass $g \circ f$ \mathcal{A} - \mathcal{A}' -messbar ist.

(2 Punkte)

b) Zeige, dass $\sigma(f) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}'\}$ die kleinste σ -Algebra ist, bezüglich der f messbar ist.

(3 Punkte)

c) Zeige, dass für zwei σ -Algebren $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}'$ die Abbildung f auch $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ -messbar ist.

(2 Punkte)

4. Der Vektorraum der messbaren Funktionen.

Sei (Ω, \mathcal{A}) ein messbarer Raum. Zeige, dass für \mathcal{A} - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Funktionen

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

und $\alpha \in \mathbb{R}$ auch

$$\alpha f, f + g, f - g$$

\mathcal{A} - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Funktionen sind. Folgere daraus, dass der Raum der \mathcal{A} - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbaren Funktionen ein Vektorraum ist.

Hinweis: Addition ist hier punktweise zu verstehen, also zum Beispiel $(f + g)(\omega) = f(\omega) + g(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.

(6 Punkte)

5. Bildmaße von Pseudoinversen.

Sei \mathbb{P} das Maß der Verteilung $\mathcal{U}([0, 1])$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, F die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariable, die nur endlich viele Werte annimmt und

$$F^{-1} : [0, 1] \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, x \mapsto \inf\{s \in \mathbb{R} \mid F(s) \geq x\}.$$

Als Konvention benutzen wir hier $\inf \emptyset = -\infty$.

a) Zeichnet für das Beispiel $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], x \mapsto \sum_{k=1}^5 \frac{1}{5} \mathbf{1}_{[k, \infty)}(x)$ die Funktion F^{-1} .

(2 Punkte)

b) Zeige, dass $F^{-1} : (\mathcal{B}([0, 1]), \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ -messbar ist.

(2 Punkte)

c) Bestimme die Verteilungsfunktion des Bildmaßes $\mathbb{P} \circ (F^{-1})^{-1}$ an.

(3 Punkte)

Hinweis: $(F^{-1})^{-1}$ bezeichnet das Urbild der Abbildung F^{-1} . Weil die Notation schrecklich aussehen würde, nutzen wir hier eine alternative Schreibweise für das Bildmaß: Statt μ_f schreibt man manchmal auch $\mu \circ f^{-1}$.

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 4. Oktober 2023, 10:00 Uhr, in Ilias abzugeben.