Prof. Dr. Leif Döring
Felix Schamoni

Stochastik I

4. Übung

1. Eine wichtige Aussage mit einem schönen Beweis.

a) Im Skript steht über der Proposition 2.1.4: „Zum Glück ist es wie im Kapitel zuvor, es reicht einen Erzeuger zu betrachten“. Welche Aussage des letzten Kapitels ist damit gemeint? Vervollständige diese Aussage entsprechend des folgenden Satzes:

Um ... auf einer σ-Algebra zu zeigen, genügt es ... auf einem ... Erzeuger zu zeigen.

b) Formuliere einen analogen Satz zur Aussage aus Proposition 2.1.4.

c) Im Beweis von Proposition 2.1.4 wird $\mathcal{F}' = \mathcal{A}'$ durch die Kette

$$\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{E}') \subseteq \sigma(\mathcal{F}') = \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{A}'$$

gezeigt. Gib eine kurze Begründung für jedes „$=$ “und jedes „$\subseteq$ “.

d) Unterteile die „$\Leftarrow$“-Richtung des Beweises von Proposition 2.1.4 in drei aufeinander aufbauende Bausteine und beschreibe jeweils kurz deren Funktion.

(je 1 Punkt)

2. Messbare Funktionen.

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $(f_n, n \in \mathbb{N})$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen mit $f_n \colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeige, dass die für $\omega \in \Omega$ punktweise definierte Funktionen

$$g_1(\omega) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(\omega), \quad g_2(\omega) := \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n(\omega), \quad g_3(\omega) := \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n(\omega),$$

messbar sind. (Die Ausdrücke sind wohldefiniert, da bei numerischen Funktionen auch die Werte $+\infty, -\infty$ erlaubt sind.) *(4 Punkte)*

b) Zeige, dass falls für jedes $\omega \in \Omega$ der Grenzwert

$$f(\omega) := \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$$

in $\bar{\mathbb{R}}$ existiert, auch f eine messbare numerische Funktion ist. *(2 Punkte)*

3. Eigenschaften messbarer Funktionen.

Seien die messbaren Räume $(\Omega, \mathcal{A}), (\Omega', \mathcal{A}'), (\Omega'', \mathcal{A}'')$ und die messbaren Funktionen

$$f \colon \Omega \to \Omega', \quad g \colon \Omega' \to \Omega''$$

gegeben.

a) Zeige, dass $g \circ f$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}''$-messbar ist.

(2 Punkte)

b) Zeige, dass $\sigma(f) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}'\}$ die kleinste σ-Algebra ist, bezüglich der f messbar ist.

(3 Punkte)

c) Zeige, dass für zwei σ-Algebren $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}'$ die Abbildung f auch $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$-messbar ist.

(2 Punkte)

4. Der Vektorraum der messbaren Funktionen.

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Zeige, dass für $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktionen

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad g : \Omega \to \mathbb{R}$$

und $\alpha \in \mathbb{R}$ auch

$$\alpha f, f + g, f - g$$

$\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktionen sind. Folgere daraus, dass der Raum der $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbaren Funktionen ein Vektorraum ist.

Hinweis: Addition ist hier punktweise zu verstehen, also zum Beispiel $(f + g)(\omega) = f(\omega) + g(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.

(6 Punkte)

5. Bildmaße von Pseudoinversen.

Sei $\mathbb{P}$ das Maß der Verteilung $\mathcal{U}([0,1])$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, F die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariable, die nur endlich viele Werte annimmt und

$$F^{-1} : [0,1] \to \bar{\mathbb{R}}, x \mapsto \inf\{s \in \mathbb{R} \mid F(s) \geq x\}.$$

Als Konvention benutzen wir hier $\inf \emptyset = -\infty$.

a) Zeichnet für das Beispiel $F : \mathbb{R} \to [0,1], x \mapsto \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{5} \mathbf{1}_{[k,\infty)}(x)$ die Funktion F^{-1}.

(2 Punkte)

b) Zeige, dass F^{-1} $(\mathcal{B}([0,1]), \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-messbar ist. *(2 Punkte)*

c) Bestimme die Verteilungsfunktion des Bildmaßes $\mathbb{P} \circ (F^{-1})^{-1}$ an. *(3 Punkte)*

Hinweis: $(F^{-1})^{-1}$ bezeichnet das Urbild der Abbildung F^{-1}. Weil die Notation schrecklich aussehen würde, nutzen wir hier eine alternative Schreibweise für das Bildmaß: Statt μ_f schreibt man manchmal auch $\mu \circ f^{-1}$.

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 5. Oktober 2022, 10:00 Uhr, in Ilias abzugeben.