Prof. Dr. Leif Döring
Felix Schamoni

Stochastik I

3. Übung

1. Aussagen zuordnen.
Bilde aus den gegeben Begriffen und Aussagen so viele richtige Zuordnungen wie möglich. Aussagen können mehrmals oder gar nicht verwendet werden.
Beispiel: 5A ist eine richtige, 1J ist eine falsche Zuordnung.

Begriffe:	**Aussagen:**
1 Lebesgue-Maß	A „Ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß."
2 Dirac-Maß	B „Ist auf der Borel-Sigma-Algebra definiert."
3 Indikatorfunktion	C „Bildet nicht in die reellen Zahlen ab"
4 Verteilungsfunktion	D „Ist diskret, wenn sie Einpunktmengen nicht auf Null abbildet."
5 Verteilung	E „Bildet Elemente der Grundmenge in das Intervall [0,1] ab."
	F „Ist ein unendliches Maß"
	G „Wird auf einer beliebigen Sigma-Algebra definiert.
	H „Prüft, ob das eingesetzte Element in einer festgelegten Menge enthalten ist."
	I „Bildet eine Menge in das Intervall [0,1] ab."
	J „ist absolutstetig, wenn sie durch eine Dichte festgelegt wird."
	K „Prüft, ob die eingesetzte Menge ein festgelegtes Element enthält."

(3 Punkte)

2. Fortsetzungen von Mengenfunktionen zu Maßen.
Sei

$$\mathcal{E} := \{E \subseteq \mathbb{R} : E \text{ endlich}\}$$

und die Mengenfunktion

$$\mu\colon \mathcal{E} \to [0,\infty], \quad E \mapsto 0,$$

gegeben.

a) Zeige, dass $\mathcal{E}$ ein Semiring ist und bestimme $\sigma(\mathcal{E})$. *(3 Punkte)*

b) Zeige, dass für jedes $\alpha \geq 0$ durch

$$\nu_\alpha : \sigma(\mathcal{E}) \to [0,\infty], \quad E \mapsto \mu_\alpha(E) := \begin{cases} 0, & E \text{ abzählbar,} \\ \alpha, & E^C \text{ abzählbar} \end{cases}$$

ein Maß definiert wird, das μ fortsetzt. Warum ist dies kein Widerspruch zu Satz 1.3.8? *(4 Punkte)*

3. Maße und Verteilungsfunktionen.

Berechne die Verteilungsfunktionen der folgenden Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$:

$$\mathbb{P}_1 := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_k,$$
$$\mathbb{P}_2 := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k, \quad p \in (0,1), n \in \mathbb{N},$$
$$\mathbb{P}_3 := p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \delta_n, \quad p \in (0,1).$$

(je 2 Punkte)

4. Diskrete Verteilungsfunktionen und Mischungen von Diracmaßen.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge reeller Zahlen, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nichtnegativen reellen Zahlen, sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$$

erfüllt ist und die Funktion F definiert als

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \mathbf{1}_{[a_n,\infty)}(t).$$

a) Zeige, dass F eine Verteilungsfunktion ist. *(2 Punkte)*

b) Bestimme das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_F$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *(2 Punkte)*

c) Berechne $\mathbb{P}((a,b])$ und $\mathbb{P}([a,b])$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$. Wann gilt $\mathbb{P}((a,b]) \neq \mathbb{P}([a,b])$? *(2 Punkte)*

d) Skizziere F mit $a_n = n$ und $p_n = \frac{6}{(\pi n)^2}$ für $n \in \mathbb{N}$. *(2 Punkte)*

Hinweis: Für Aufgabenteil b) könnt ihr vom letztem Übungsblatt benutzen, dass eine Mischung von Wahrscheinlichkeitsmaßen wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

5. Das Lebesgue-Maß.

Sei $\mathcal{S} := \{(a,b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ und

$$\lambda\colon \mathcal{S} \to [0,\infty), \quad (a,b] \mapsto \lambda((a,b]) = b - a.$$

Setze λ mittels des Fortsetzungssatzes zu einem Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ fort. Zeige zudem, dass die Fortsetzung von λ ein unendliches Maß ist.

Hinweis: Den Beweisweg haben wir schon in der Vorlesung skizziert. Um die Details auszuarbeiten, orientiert ihr euch am besten an Satz 1.4.4 aus der Vorlesung.

(6 Punkte)

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 28. September 2022, 10:00 Uhr, in Ilias abzugeben.