Prof. Dr. Leif Döring
Felix Schamoni

Stochastik I

2. Übung

1. Darstellungen.

Gerade im Umgang mit Mengen habt ihr hoffentlich schon gelernt, wie nützlich es für das eigene Verständnis sein kann, zu einem Begriff oder einer Aussage ein „Bildchen" zu zeichnen.

(i) Veranschauliche die Richtigkeit der de Morganschen Regel für zwei Mengen A und B mit Hilfe von einem Venn-Diagramm (Bildchen). *(2 Punkte)*

(ii) Auch eine Verbalisierung ist eine Darstellung, die dem eigenen Verständnis nützt. Beschreibe daher in eigenen Worten, wie man nach Definition 1.3.5. herausfindet, ob $A \subseteq \Omega$ eine μ^*-messbare Menge ist. *(2 Punkte)*

2. Noch mehr Spaß mit Dynkin-Systemen.

Sei Ω eine nicht leere Menge und $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Zeige, dass das Mengensystem $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System ist, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\Omega \in \mathcal{D}$,

(ii) $A, B \in \mathcal{D}$ und $A \subseteq B \implies B \backslash A \in \mathcal{D}$,

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ und $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$. *(4 Punkte)*

3. Eigenschaften von Verteilungsfunktionen.

Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dann heißt die Funktion

$$F\colon \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto F(x) := \mathbb{P}((-\infty, x]),$$

die Verteilungsfunktion von $\mathbb{P}$. Zeige, dass eine solche Verteilungsfunktion folgende Eigenschaften erfüllt:

a) $0 \leq F(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, *(1 Punkt)*

b) F ist monoton steigend, *(2 Punkte)*

c) F ist rechtsseitig stetig, *(2 Punkte)*

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$. *(2 Punkte)*

Hinweis: Das ist Stetigkeit von Maßen!

4. Erzeuger von σ-Algebren.

(a) Zeige, dass die Mengensysteme

$$\mathcal{E}_1 := \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{E}_2 := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\},$$

Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sind. *(6 Punkte)*

Hinweis: Ihr dürft dafür das Ergebnis aus der Vorlesung nutzen, dass die Menge der offenen Intervalle in $\mathbb{R}$ auch ein Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist.

(b) Sei $\Omega = \{a, b, c, d\}$ und $\mathcal{E} = \{\{a, b\}, \{d\}\}$. Bestimme $\sigma(\mathcal{E})$. *(2 Punkte)*

5. Semiring Trauma.

Seien $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{P}(\Omega_1)$ und $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega_2)$ zwei Semiringe und $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ σ-Algebren über Ω_1 bzw. Ω_2.

(i) Zeige, dass das Produkt von $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$, definiert als

$$\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 := \{A \times B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2 \mid A \in \mathcal{S}_1, B \in \mathcal{S}_2\},$$

wieder ein Semiring ist. *(5 Punkte)*

(ii) Zeige, dass das Produkt von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ (vgl. ÜB 1 Aufgabe 1) schnittstabil ist. *(2 Punkte)*

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 21. September 2022, 10:00 Uhr, in Ilias abzugeben.