Prof. Dr. Leif Döring
Felix Schamoni

Stochastik I

1. Übung

1. Neue Begriffe sortieren

In den ersten beiden Vorlesungen sind einige neue Begriffe aufgetaucht. Erstelle eine Grafik (z.B. eine Mindmap oder ein Mengendiagramm, analog oder digital), in der die Zusammenhänge zwischen diesen neuen Begriffen deutlich werden. Ist zum Beispiel jede Sigma-Algebra ein Dynkin-System oder umgekehrt? Welche Objekte aus der Maßtheorie haben noch eine andere Bezeichnung aus der Wahrscheinlichkeitstheorie? Und wie hängen zum Beispiel messbare Mengen mit messbaren Räumen zusammen?
Hinweis: Punkte gibt es für eine inhaltlich richtige und übersichtliche Darstellung. *(3 Punkte)*

2. Weitere Eigenschaften von σ-Algebren und Maßen.

a) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω und $A \in \mathcal{A}$. Zeige, dass

$$\mathcal{A}_A := \{B \cap A \mid B \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra über A ist.

(3 Punkte)

b) Sei $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ und $\mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra über Ω_2. Zeige, dass

$$\mathcal{A}_1 := f^{-1}(\mathcal{A}_2) = \{f^{-1}(A_2) \mid A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

eine σ-Algebra über Ω_1 ist. *(3 Punkte)*

c) Seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ σ-Algebren über Ω_1 und Ω_2. Zeige oder widerlege, dass das Produkt von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$, definiert als

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 := \{A \times B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2 \mid A \in \mathcal{A}_1, B \in \mathcal{A}_2\}$$

eine σ-Algebra über $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist. *(2 Punkte)*

d) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ beliebig. Zeige, dass die sogenannte σ-Subadditivität von Maßen gilt, also

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(3 Punkte)

3. Wahrscheinlichkeitsmaße.

Sei der messbare Raum $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ gegeben, versehen mit

$$\mu_1 := c_1 \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \delta_n, \quad c_1 \in \mathbb{R}, p \in (0,1),$$

$$\mu_2 := c_2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k, \quad c_2 \in \mathbb{R}, p \in (0,1), n \in \mathbb{N},$$

$$\mu_3 := \sum_{k=0}^{n} a_k \delta_k, \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

wobei δ_k das Dirac-Maß in k bezeichne. Welche Forderungen müssen die Konstanten c_1, c_2 und $a_1, \ldots, a_n$ erfüllen, damit die obigen Funktionen Maße bzw. Wahrscheinlichkeitsmaße sind?
Wichtig: Ohne Begründung gibt es keine Punkte. ☺

(6 Punkte)

4. Weiteres zur σ-Additivität

Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ eine Mengenfunktion mit

- $\mu(\Omega) < \infty$,
- μ ist additiv (falls A, B disjunkt, so gilt $\mu(A \dot\cup B) = \mu(A) + \mu(B)$).

Außerdem sei μ von unten stetig, d.h. falls $A_n \uparrow A \in \mathcal{A}$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

Zeige, dass μ unter diesen Voraussetzungen σ-additiv ist.
Hinweis: Zeige zuerst per Induktion, dass μ endlich additiv ist. *(4 Punkte)*

5. Modellierung von Zufallsexperimenten.

Aus einer Menge von vier Kugeln werden blind zwei Kugeln ausgewählt, wobei jede Kugel einer Zahl zwischen eins und vier entspricht. Die Kugeln werden gleichzeitig ausgewählt, sodass immer 2 verschiedene Kugeln gezogen werden und die Reihenfolge keine Rolle spielt.

(a) Modelliere einen Wahrscheinlichkeitsraum , der dieses Experiment beschreibt. Gebe dazu eine Menge von Elementarereignissen Ω, eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ an. *(2 Punkte)*

(b) Definiere und berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

(i) Die Summe der Kugeln ist größer als 5. *(1 Punkt)*

(ii) Das Produkt der Kugeln ist ungerade. *(1 Punkt)*

(iii) Das Produkt der Kugeln ist gerade. *(1 Punkt)*

(iv) Die Kugel Nummer drei oder die Kugel Nummer 4 wird gezogen. *(1 Punkt)*

Die Lösungen sind in Zweiergruppen bis Mittwoch, den 14. September 2022, 10:00 Uhr, in Ilias abzugeben.