

- a) Für ein stochastisches Modell benötigt man per Def 4.1.2 einen W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und eine $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -messbare Abbildung $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Die sogenannte kanonische Konstruktion für eine beliebige Verteilungsfunktion F besteht aus dem W-Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_F)$ und der Zufallsvariablen $X(\omega) = \omega, \omega \in \mathbb{R}$.

- b) Zufallsvariable $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (wobei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum)
Verteilung $P_X: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
Verteilungsfunktion $F_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

c) i) $E[g(X)] := \int_{\Omega} g(X(\omega)) dP(\omega)$

für $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar nach Def 4.1.9

ii) $E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) dP_F(x)$ für $X \sim F$
und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar nach Lemma 4.1.10

- iii) Für X absolutstetig mit Dichte f :

$$E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx$$

Für X diskret mit Werten $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ mit Wahrscheinlichkeiten $p_1, \dots, p_N$:

$$E[g(X)] = \sum_{k=1}^N p_k g(a_k) = \sum_{k=1}^N P(X=a_k) g(a_k)$$

a) Beh: X ist integrierbar

Bew: $E[|X|]$ ist wohldefiniert, da $|X| \geq 0$ gilt.

$$\text{Zudem gilt } E[|X|] = \int_{\Omega} |X| dP = \int_{\{|X| < 1\}} |X| dP + \int_{\{|X| \geq 1\}} |X| dP$$

$$M_{\Omega} = M_{A \cup A^c} = M_A + M_{A^c}$$

$$\leq \int_{\{|X| < 1\}} 1 + \int_{\{|X| \geq 1\}} |X|^2 dP$$

$$\leq 1 + \int_{\Omega} X^2 dP$$

$$= 1 + E[X^2] < \infty$$

b) Beh: $V(X) = E[X^2] - E[X]^2$

Bew: Nach a) ist X integrierbar, also $E[X] \in \mathbb{R}$.

Die Varianz ist wohldefiniert, da $(X - E[X])^2 \geq 0$ gilt.

Mit Linearität des Erwartungswertes folgt

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X - E[X])^2] = E[X^2 - 2E[X]X + E[X]^2] \\ &= E[X^2] - E[2E[X]X] + E[E[X]^2] \\ &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 \\ &= E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

c) Beh: $V(X+a) = V(X)$

$$\begin{aligned} \text{Bew: } V(X+a) &= E[(X+a - E[X+a])^2] \\ &= E[(X+a - a - E[X])^2] \\ &= E[(X - E[X])^2] = V(X) \end{aligned}$$

d) Beh: $V(aX) = a^2 V(X)$

Bew: $V(aX) \stackrel{(b)}{=} E[(aX)^2] - E[aX]^2$
 $= a^2 E[X^2] - a^2 E[X]^2$
 $= a^2 (E[X^2] - E[X]^2) = a^2 V(X)$

e) Beh: $V(X) = 0 \iff \exists c \in \mathbb{R} : X = c \text{ P-f.s.}$

Bew: " $\Rightarrow$ ": Sei $V(X) = E[(X - E[X])^2] = 0$. Da $(X - E[X])^2 \geq 0$
 folgt $(X - E[X]) = 0 \text{ P-f.s.}$

$\Rightarrow X = E[X] \text{ P-f.s.}$

" $\Leftarrow$ ": Sei nun $X = c \text{ P-f.s.}$ für ein $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow E[X] = \int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} c dP = E[c] = c$

$\Rightarrow V(X) = E[(X - E[X])^2] = \int_{\Omega} (X - E[X])^2 dP$

$= \int_{\Omega} (c - c)^2 dP$

$= \int_{\Omega} 0 dP = 0 \quad \square$

Geg: X diskret gleichverteilt auf $\{1, \dots, n\}$, Y stetig
verteilt mit Dichte $f(y) = c \sin(y) \mathbb{1}_{[\pi/2, \pi]}(y)$

a) Ges: $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{V}(X)$, M_X

Lsg: Da $e^{tk} \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ gilt, ist M_X wohldefiniert.

Es gilt für $t \in \mathbb{R}$:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tk}] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} e^{tk} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{tk}$$

$$\Rightarrow M_X(t) < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\stackrel{\text{VL}}{\Rightarrow} \mathbb{E}[X^k] = M_X^{(k)}(0) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

• Es gilt $M_X'(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k e^{tk}$, also ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] = M_X'(0) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k e^{0 \cdot k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

• Es gilt $M_X''(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 e^{tk}$, also ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] = M_X''(0) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 e^{0 \cdot k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Mit Verschiebungsformel:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2 + n(n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{2(n+1)^2 + 2n(n+1) - 3(n+1)^2}{12} \end{aligned}$$

$$= \frac{2n(n+1) - (n+1)^2}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

b) Ges: c , F_Y , $E[Y]$ und M_Y .

Lsg: Es muss gelten

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{!}{=} P(Y \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} c \sin(y) \mathbf{1}_{[0, \pi]}(y) dy \\ &= c \int_0^{\pi} \sin(y) dy = c [-\cos(y)]_0^{\pi} \\ &= c (-1 - (-1)) = 2c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2}. \quad \text{Also } f(y) = \frac{1}{2} \sin(y) \mathbf{1}_{[0, \pi]}(y)$$

Damit gilt für $t \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \int_0^t \frac{1}{2} \sin(y) dy = -\frac{1}{2} [\cos(y)]_0^t \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\cos(t)}{2}. \end{aligned}$$

Da $f(y) = 0$ für $y \leq 0$ folgt $F_Y(t) = 0$ für $t \leq 0$

und für $t > \pi$:

$$F_Y(t) = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin(y) dy \stackrel{\text{s.o.}}{=} 1$$

$$\Rightarrow F_Y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{\cos(t)}{2}, & t \in [0, \pi] \\ 1, & t > \pi \end{cases}$$

Nun berechnen wir den Erwartungswert. Da $y \cdot f(y)$ eine

stetige Funktion mit kompaktem Träger ist, ist $y \cdot f(y) \in C^1(\mathbb{R})$

und der EW ist wohldef. mit partieller Integration

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_0^{\pi} y \cdot \frac{\sin(y)}{2} dy = \frac{1}{2} \left([-y \cos(y)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(y) dy \right) \\ &= \frac{1}{2} (\pi + 0) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Und zuletzt gilt für $t \neq 0$.

$$M_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] \underset{\substack{\text{wohldef.}, \\ \text{da } e^{tY} \geq 0 \\ \& \text{ messbar}}}{=} \int_0^\pi \frac{1}{2} e^{ty} \sin(y) dy$$

$$\begin{aligned} \text{part. int.} &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\left[\frac{1}{t} e^{ty} \sin(y) \right]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi \frac{1}{t} e^{ty} \cos(y) dy \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[-\frac{1}{t^2} e^{ty} \cos(y) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{t^2} e^{ty} \sin(y) dy \right) \\ &= \frac{1}{2t^2} (e^{t\pi} + 1) - \frac{1}{t^2} M_Y(t) \end{aligned}$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{t^2} \right)}_{= \frac{t^2+1}{t^2}} M_Y(t) = \frac{e^{t\pi} + 1}{2t^2}$$

$$\Rightarrow M_Y(t) = \frac{e^{t\pi} + 1}{2(t^2 + 1)}$$

(*) Hier müssen wir vorsichtig sein. Um nach $M_Y(t)$ umstellen zu können, muss $M_Y(t)$ i.a. gelten! Wir haben bis jetzt nur wohldefiniert gezeigt. Die Endlichkeit folgt aus $|M_Y(t)| \leq \int_0^\pi |e^{ty} \sin(y)| dy \leq \pi e^{t\pi} < \infty$.

Fall $t=0$: Für $t=0$ gilt $M_Y(0) = \mathbb{E}[e^{0Y}] = 1$

$$\Rightarrow M_Y(t) = \begin{cases} 1, & t=0 \\ \frac{e^{t\pi} + 1}{2(t^2 + 1)}, & t \neq 0. \end{cases}$$

Beh: i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iii)

Bew:

• i) $\Leftrightarrow$ ii): Gilt nach Definition diskreter Zufallsvariablen

• i) $\Leftrightarrow$ iii):

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{n=1}^{\infty} f(a_n) \cdot p_n$$

„ $\Rightarrow$ “: Gilt nach Satz 3.3.3 aus Skript/VL

„ $\Leftarrow$ “: Sei $t \in \mathbb{R}$. Wähle $f(x) = \mathbb{1}_{(-\infty, t]}(x)$

$\Rightarrow f$ ist positiv und messbar

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_X(t) &= \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X \leq t\}}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(-\infty, t]}(X)] \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{iii)}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{(-\infty, t]}(a_n) p_n$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{[a_n, \infty)}(t) p_n$$

$\Rightarrow F_X$ ist eine diskrete Verteilungsfunktion

(i) ZV X ist diskret

(ii) $\mathbb{P}_X$ ist diskretes $\mathbb{W}$ -Maß

(iii) $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n = 1$,

sodass für alle messbare, pos. Fkt f gilt:

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(a_n) p_n$$

$$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$$

Ges: $E[X]$, $V(X)$, $\mathcal{M}_X$

Lsg:

Es gilt $P_X(-\infty, 0] = 0$, also gilt $X = X \cdot \mathbb{1}_{(0, \infty)}$ P_X -f.s.

und damit ist $E[X] = E[X \cdot \mathbb{1}_{(0, \infty)}]$ wohldefiniert, da

$$X \cdot \mathbb{1}_{(0, \infty)} \geq 0.$$

Nach VL gilt:

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha x^\alpha e^{-\beta x} dx$$

Substitution $\frac{dy}{dx} = \beta$
 $y = \beta x$
 $\Rightarrow dx = \frac{1}{\beta} dy$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha \left(\frac{y}{\beta}\right)^\alpha e^{-y} \frac{1}{\beta} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta} \int_0^\infty y^\alpha e^{-y} dy$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(\alpha+1)$$

$$= \alpha \Gamma(\alpha)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta} \Gamma(\alpha+1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta} \alpha \Gamma(\alpha) = \frac{\alpha}{\beta}$$

Da $X^2 \geq 0$ ist $E[X^2]$ wohldefiniert. Mit der gleichen Substitution folgt

$$E[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha \int_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-\beta x} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha \int_0^\infty \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\alpha+1} e^{-y} \frac{1}{\beta} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta^2} \int_0^\infty y^{\alpha+1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta^2} \Gamma(\alpha+2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\beta^2} (\alpha+1) \Gamma(\alpha+1)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta^2} (\alpha+1) \alpha \Gamma(\alpha) = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2}$$

$$\Rightarrow V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Da $e^{\lambda x} \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ist $E[e^{\lambda x}]$ wohldefiniert und für $\lambda < \beta$ gilt:

$$\mathcal{M}_X(\lambda) = E[e^{\lambda x}] = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) dx$$

Substitution:

$$y = (\beta - \lambda)x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{\beta - \lambda} dy$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\beta-\lambda)x} dx$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{y}{\beta-\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-y} \frac{1}{\beta-\lambda} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha \left(\frac{1}{\beta-\lambda}\right)^\alpha \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\beta}{\beta-\lambda}\right)^\alpha \Gamma(\alpha) = \left(\frac{\beta}{\beta-\lambda}\right)^\alpha$$

Für $\lambda \geq \beta$ gilt $-(\beta-\lambda) \geq 0 \Rightarrow e^{-(\beta-\lambda)x} \geq 1 \quad \forall x \geq 0$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_X(\lambda) = E[e^{\lambda x}] = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\beta-\lambda)x} dx$$

$$\geq \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} dx = \infty$$

Zusammen:

$$\Rightarrow \mathcal{M}_X(\lambda) = \begin{cases} \left(\frac{\beta}{\beta-\lambda}\right)^\alpha, & \lambda < \beta \\ \infty, & \lambda \geq \beta \end{cases} \quad \square$$