a) Die Integranden sind $|f \cdot g|$, $|f|^p$ und $|g|^q$

Diese sind messbar, weil f und g nach Voraussetzung messbar sind, die Betragsfunktion ist wegen ihrer Stetigkeit messbar ebenso wie alle Polynome.

Die Integranden sind also als Verknüpfung messbarer Funktionen messbar. Es gilt $|f \cdot g| \geq 0$.

Da $|f| \geq 0$ und $|g| \geq 0$ sind auch $|f|^p$ und $|g|^q$ nicht-negativ.

Messbarkeit und Nicht-Negativität erfüllt die Voraussetzungen von Definition 3.1.5

b) Im Beweis wird eine Fallunterscheidung gemacht:

Im Fall 1: „Einer der Faktoren auf der rechten Seite ist 0 oder $+\infty$" wird gezeigt, dass dann trotzdem in jedem Fall die Ungleichung erfüllt ist.

Im Fall 2: „Beide Faktoren auf der rechten Seite sind > 0" wird die Ungleichung mithilfe der Young-Ungleichung gezeigt. Hier benötigen wir auch, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist.

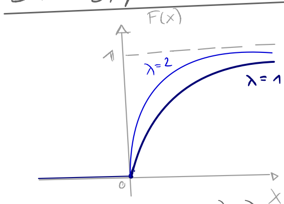
c) Im Beweis wurde bereits gezeigt, dass

$\frac{1}{\sigma T} \int_\Omega |fg| \, d\mu \leq 1$ ist.

weil $\sigma, T > 0$ $\Rightarrow \int_\Omega |fg| \, d\mu \leq \sigma \cdot T \overset{\text{Def von } \sigma \text{ und } T}{=} \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_\Omega |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$

Geg: $F: \mathbb{R} \to [0,1],\ x \mapsto \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)\right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ $\qquad \lambda > 0$

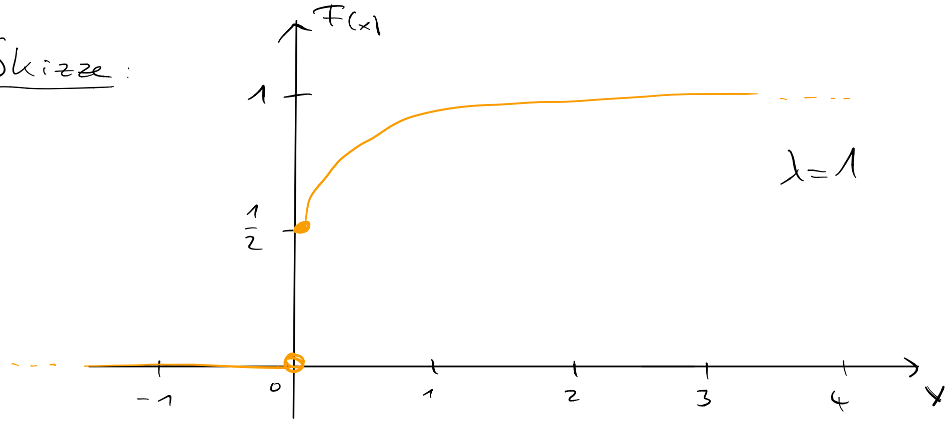
Die Exponentialverteilung



$F(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$

$\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

Skizze:



$F(0) = \frac{1}{2}$

Beh: $\mathbb{P} := \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\,\mathrm{Exp}(\lambda) = \mathbb{P}_F$

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}\delta_0(A) + \frac{1}{2}\int_A \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\, dx$

Bew: $\mathbb{P}$ ist W-Maß, da $\mathbb{P}(\mathbb{R}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$\mathbb{P}((-\infty, t]) = \frac{1}{2}\delta_0((-\infty,t]) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\, dx$$

$$= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t, & t \geq 0 \end{cases}$$

$F(t) = \mathbb{P}_F((-\infty, t])$

$$= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\lambda t}\right), & t \geq 0 \end{cases}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)\right)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) = F(t) = \mathbb{P}_F((-\infty, t])$$

$\Rightarrow F$ ist Verteilungsfunktion von $\mathbb{P}$ und da auf einem

$\mathcal{E} = \{(-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\}$ $\qquad \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Eindeutigkeits- & Existenzsatz

schnittstabilen Erzeuger $\mathbb{P} = \mathbb{P}_F$ gilt, folgt $\mathbb{P} = \mathbb{P}_F$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}$ ist das zu F korrespondierende W-Maß

Die Gebetsmühle

① nicht negative einfache Fkt.

$\downarrow$

② nicht negative mb.- numerische Fkt

$\downarrow$

③ μ- integrierbare Fkt

Für die Berechnung des ersten Moments $\int_{\mathbb{R}} x \, d\mathbb{P}_F$ müssen wir das Integral über die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ über die Gebetsmühle berechnen. Betrachten wir also zunächst das Integral über eine Funktion $f \in \mathcal{E}^+$ mit $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$. ①

Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mathbb{P}_F \overset{VL}{=} \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{P}_F(A_k) \overset{\text{oben}}{\underset{\mathbb{P} = \mathbb{P}_F}{=}} \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(\tfrac{1}{2}\delta_0 + \tfrac{1}{2}\int_{A_k} \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\, dx\right)$$

$$\overset{\text{lin}}{=} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k \delta_0(A_k) + \int_{A_k} \alpha_k \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\, dx$$

$$\overset{\text{lin}}{=} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k \delta_0(A_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{A_k} \alpha_k \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\, dx$$

$\dot{\bigcup}_{k=1}^{\infty} A_k = \mathbb{R}$ $\qquad$ $\alpha_k = f(x)\ \forall x \in A_k$ $\qquad$ $\delta_0(A_k) = \begin{cases} 1, & 0 \in A_k \\ 0, & 0 \notin A_k \end{cases}$ $\qquad$ $\alpha_k = f(x)\ \forall x \in A_k$

Γ disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n$

$\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} = \mathbb{1}_{\dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i}$

$$= \frac{1}{2}\left(f(0) + \int_{\mathbb{R}} f(x) \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\, dx\right)$$

$\int \mathbb{1}_{A_1} \alpha_1 \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)} + \dots + \mathbb{1}_{A_n} \alpha_n \dots \, dx$

② Sei nun f pos., messbare Funktion. Dann existiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}^+$ mit $f_n \uparrow f$ und

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mathbb{P}_F = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mathbb{P}_F \overset{\text{MCT für } \mathcal{E}^+}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mathbb{P}_F$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(f_n(0) + \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\, dx\right)$$

Für die Integranden rechts muss noch die Messbarkeit gezeigt werden. Dies gilt aber schnell: f_n ist nach Def messbar und $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ ist als stetige Abbildung messbar. Damit ist auch das Produkt messbar. Für diesen Term gilt dann zudem

$f_n \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)} \uparrow f \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ für $\lambda > 0$.

Damit folgt mit monotoner Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f \, d\mathbb{P}_F = \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) dx$$

③ Sei nun f eine $\mathbb{P}_F$-integrierbare Funktion:

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mathbb{P}_F = \int_{\mathbb{R}} f^+ d\mathbb{P}_F - \int_{\mathbb{R}} f^- d\mathbb{P}_F$$

$$= \frac{1}{2} f^+(0) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f^+(x) \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) dx - \left(\frac{1}{2} f^-(0) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f^-(0) \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(x) \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) dx \text{ , da}$$

f $\mathbb{P}_F$ integrierbar und damit $\int_0^\infty f^+ \lambda e^{-\lambda x} dx < \infty$ und $\int_0^\infty f^- \lambda e^{-\lambda x} dx < \infty$.

Nun zum ersten Moment, also $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$

$$\int_{\mathbb{R}} x \, d\mathbb{P}_F = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$\overset{\text{(partielle Integration)}}{=} \frac{1}{2} \left(\left[x(-e^{-\lambda x}) \right]_0^\infty - \int_0^\infty 1 \cdot (-e^{-\lambda x}) dx \right)$$

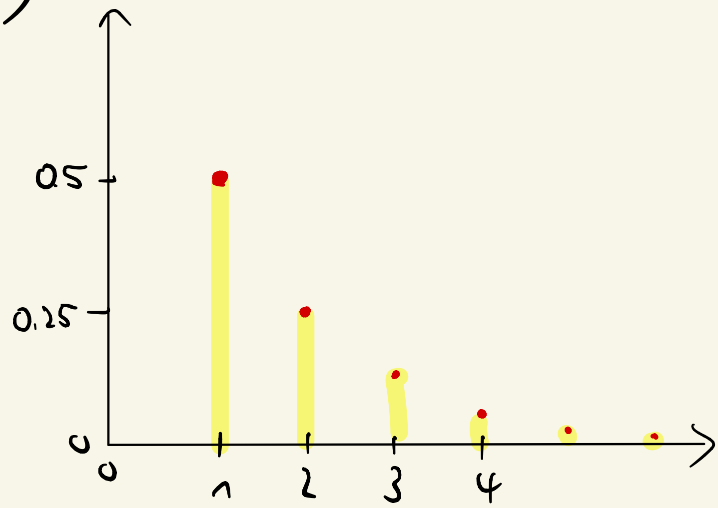
$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^\infty = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2\lambda}$$

Das Integral über x ist wohldefiniert, da

$\int_{-\infty}^0 x \, d\mathbb{P}_F = 0$ und damit endlich.

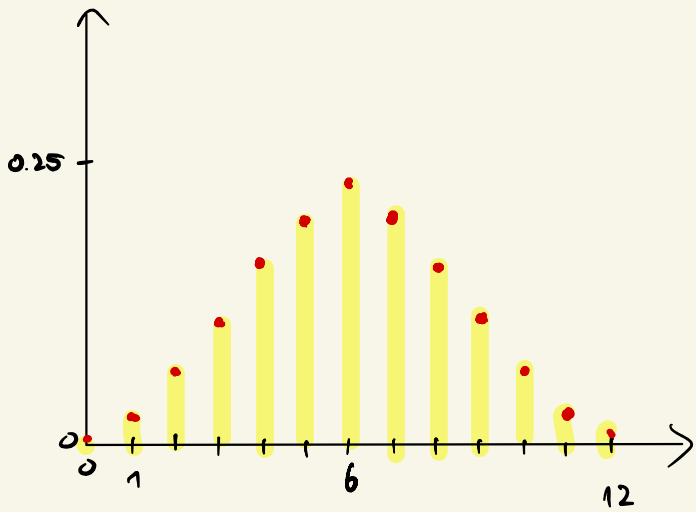
a)

$\mathbb{P}_1$



$p = 0.5$

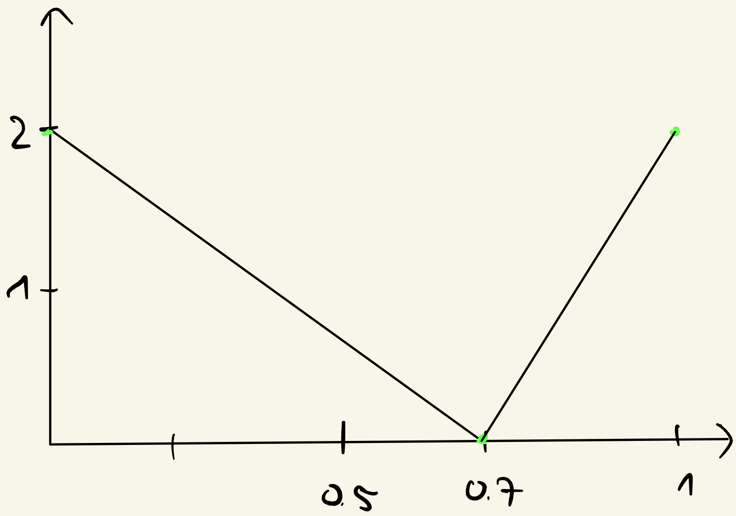
$\mathbb{P}_2$



$p = 0.5$

$n = 12$

$\mathbb{P}_3$



$c = 0.7$

b) $\mathbb{P}_1 = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \delta_k$,

d.h. $a_k = k$, $p_k = p(1-p)^{k-1}$

Es gilt $\int x \, d\mathbb{P}_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k \, p(1-p)^{k-1}$. Die Ausdrücke sind wohldefiniert, da die Summanden der rechten Seite alle ≥ 0 sind. $+\infty = +\infty$ ist allerdings möglich.
Wir zeigen erst, dass $\sum_{k=1}^{\infty} k \, p(1-p)^{k-1} < \infty$.

Dazu nutzen wir das Quotientenkriterium für die Reihe mit $a_k = k(1-p)^{k-1}$.

$$\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \limsup_{k\to\infty} \frac{k+1}{k}(1-p) = 1-p < 1.$$

Nun können wir rechnen:

$$\int x \, d\mathbb{P}_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k \, p(1-p)^{k-1} \overset{\text{Index-shift}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \, p \, (1-p)^k$$

$$\overset{\substack{\text{alle} \\ \text{Summ.} \\ \geq 0}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} k p (1-p)^k + \sum_{k=0}^{\infty} p (1-p)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \, p(1-p)^k + p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k$$

$$= (1-p) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1}}_{= \int x \, d\mathbb{P}_1} + p \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k}_{\overset{\text{geo. Reihe}}{=} \frac{1}{1-(1-p)}}$$

$$\Rightarrow p \int x \, d\mathbb{P}_1 = 1 \iff \int x \, d\mathbb{P}_1 = \frac{1}{p}$$

$\mathbb{P}_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, d.h. $\mathbb{P}_2$ ist wieder ein diskretes W-Maß auf Werten $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ und Wahrscheinlichkeiten $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Mit Formel für Integrale bzgl. diskreter Verteilungen

$$\int x \, d\mathbb{P}_1 = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

[wohldef., da nur endlich viele positive Summanden]

$$= \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{(n-k)!\,k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\overset{\text{Index-shift}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k-1)!\,k!} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}$$

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,k!} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}}_{\text{Gewichte von } \mathrm{Bin}(n-1,p) \Rightarrow \text{summieren sich zu } 1}$$

$$= np$$

$$\mathbb{P}_3(B) = \int_B \left(2\left(1-\frac{1}{c}x\right)\mathbb{1}_{[0,c]}(x) + 2\left(\frac{1}{1-c}x - \frac{c}{1-c}\right)\mathbb{1}_{(c,1]}(x)\right)dx$$

Ges.: k-te Moment von $\mathbb{P}_3$ für $k \in \mathbb{N}$

c) Nach der Vorlesung gilt $x \mapsto x^k$ ist messbar da stetig $\forall k \in \mathbb{N}$ und mit ⊛ ist unser Integral wohldef.

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \, d\mathbb{P}_3 = \int_{\mathbb{R}} x^k \left(2\left(1-\frac{1}{c}x\right)\mathbb{1}_{[0,c]}(x) + 2\left(\frac{1}{1-c}x - \frac{c}{1-c}\right)\mathbb{1}_{(c,1]}(x)\right)dx$$

Lin

$$= 2\left(\int_0^c x^k - \frac{1}{c}x^{k+1}\,dx + \int_c^1 \frac{1}{1-c}x^{k+1} - \frac{c}{1-c}x^k\,dx\right)$$

$$= 2\left(\left[\frac{1}{k+1}x^{k+1} - \frac{1}{c}\frac{1}{k+2}x^{k+2}\right]_0^c + \left[\frac{1}{1-c}\frac{1}{k+2}x^{k+2} - \frac{c}{1-c}\frac{1}{k+1}x^{k+1}\right]_c^1\right)$$

$$= 2\Big(\frac{1}{k+1}c^{k+1} - \frac{1}{c}\frac{1}{k+2}c^{k+2} + \frac{1}{1-c}\frac{1}{k+2}1^{k+2} - \frac{c}{1-c}\frac{1}{k+1}1^{k+1}$$
$$- \frac{1}{1-c}\frac{1}{k+2}c^{k+2} + \frac{c}{1-c}\frac{1}{k+1}c^{k+1}\Big)$$

$$= 2\left(\frac{1}{k+1}c^{k+1} - \frac{1}{k+2}c^{k+1} + \frac{1}{1-c}\frac{1}{k+2} - \frac{c}{1-c}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{1-c}\frac{1}{k+1}c^{k+2} + \frac{1}{1-c}\frac{1}{k+1}c^{k+2}\right)$$

$$= 2\left(c^{k+1}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) - \frac{1}{1-c}\left(\frac{c}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + c^{k+2}\frac{1}{1-c}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\right)$$

⊛ $\dfrac{k+2-(k+1)}{(k+2)(k+1)} = \dfrac{1}{(k+2)(k+1)}$

⊛
$$= 2\left(c^{k+1}\frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{1-c}\left(c(k+2)-(k+1)\right)\frac{1}{(k+1)(k+2)} + c^{k+2}\frac{1}{1-c}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

$$= \frac{2}{(k+1)(k+2)}\left(c^{k+1} - \frac{1}{1-c}\left(c(k+2)-(k+1)\right) + c^{k+2}\frac{1}{1-c}\right)$$

$$= \frac{2}{(1-c)(k+1)(k+2)}\left((1-c)c^{k+1} - c(k+2) + (k+1) + c^{k+2}\right)$$

$$= \frac{2}{(1-c)(k+1)(k+2)}\left(c^{k+1} - \cancel{c^{k+2}} - c(k+2) + (k+1) + \cancel{c^{k+2}}\right)$$

$$= \frac{2}{(1-c)(k+1)(k+2)}\left(c^{k+1} - c(k+2) + (k+1)\right)$$

da $(x^k)^- = 0, x \geq 0$ und $(x^k)^- \neq 0, x < 0$ und $\mathbb{1}_{[0,c]}(x) = 0$, $\mathbb{1}_{(c,1]}(x) = 0$

⊛ $$\int (x^k)^- \left(2\left(1-\frac{1}{c}x\right)\mathbb{1}_{[0,c]}(x) + 2\left(\frac{1}{1-c}x - \frac{c}{1-c}\right)\mathbb{1}_{(c,1]}(x)\right)dx = 0 < \infty$$

d) Ges: Exponentielle Momente von $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$

Lsg: Da $e^{\beta x} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ und die Fkt $x \mapsto e^{\beta x}$ stetig ist, sind exp. Momente immer wohldef. und wir können die Formeln nutzen.

$\mathbb{P}_1$:
$$\int e^{\beta x} \, d\mathbb{P}_1 = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} e^{\beta k}$$

$$= p e^{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \left((1-p) e^{\beta}\right)^{k-1}$$

$$\overset{\text{Index-shift}}{=} p e^{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \left((1-p) e^{\beta}\right)^{k}$$

$$\overset{\text{geo. Reihe } (*)}{=} p e^{\beta} \frac{1}{1-(1-p)e^{\beta}} = \frac{p e^{\beta}}{1-(1-p)e^{\beta}}$$

Bei (*) müssen wir vorsichtig sein! Wir können die geometrische Reihe nur anwenden, falls $|(1-p)e^{\beta}| < 1$

Also $(1-p)e^{\beta} < 1 \iff \beta < \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)$

Insgesamt gilt also

$$\int e^{\beta x} \, d\mathbb{P}_1 = \begin{cases} \frac{p e^{\beta}}{1-(1-p)e^{\beta}}, & \beta < \ln \frac{1}{1-p} \\ +\infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

Analog gilt

$$\int e^{\beta x} \, d\mathbb{P}_2 = \sum_{k=0}^{n} e^{\beta k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

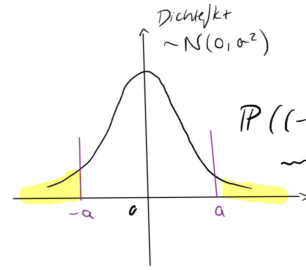
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p e^{\beta})^k (1-p)^{n-k}$$

$$\overset{\text{bin. Formel}}{=} \left(p e^{\beta} + (1-p)\right)^n$$

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ein messbarer Raum

μ ein beliebiges Maß

$\mathbb{P} \sim N(0,\sigma^2)$ $\sigma > 0$ ein W-Maß



$\mathbb{P}((-a,a)^c) \le C$

⤳ Konzentrationsungleichungen

a) <u>Beh:</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton $\Rightarrow f$ ist $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbar.

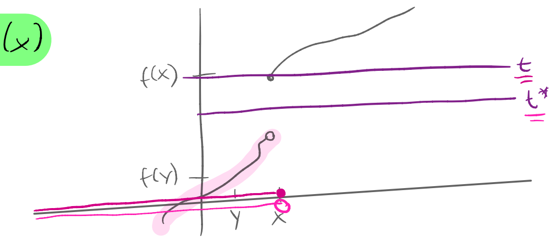
<u>Bew:</u> Sei f monoton wachsend. Dann gilt für $x, y, t \in \mathbb{R}$

$\times$ f ist monoton wachsend

$$x \in \{f \le t\} \wedge y \le x \Rightarrow f(x) \le t \wedge f(y) \le f(x)$$

$$\Rightarrow f(y) \le t$$

$$\Rightarrow y \in \{f \le t\}$$



$\Rightarrow \{f \le t\}$ ist ein Intervall der Form

$(-\infty, a(t))$ oder $(-\infty, a(t)]$ mit $a(t) := \sup\{f \le t\}$

$\Rightarrow \{f \le t\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\forall t \in \mathbb{R}$ ⤳ „Erzeuger reichen für messbarkeit"

$\Rightarrow f$ ist $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbar

Sei f monoton fallend

$\Rightarrow -f$ ist monoton wachsend

$\Rightarrow -f$ ist $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbar

$\Rightarrow -(-f)$ ist messbar, da die Messbaren Funktionen einen Vektorraum bilden.

Geg.: monoton wachsende, nichtnegative Fkt. $h: \mathbb{R} \to [0,\infty)$

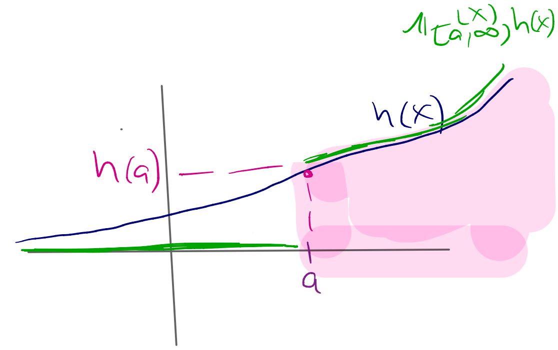
b) <u>Beh:</u> $h(a)\mu([a,\infty)) \le \int_{\mathbb{R}} h \, d\mu \quad \forall a \in \mathbb{R}$

<u>Bew:</u> Da h positiv und messbar ist (siehe a)), ist das Integral wohldefiniert.

Es gilt: ⤳ Integral einer einfachen Fkt: $x \mapsto \underbrace{1}_{„=\alpha"} \cdot \mathbb{1}_{\underbrace{[a,\infty)}_{„A"}}(x)$

$$h(a)\underbrace{\mu([a,\infty))}_{= 1 \cdot \mu([a,\infty))} = h(a) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,\infty)}(x) \, d\mu$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} \int_{\mathbb{R}} h(a) \mathbb{1}_{[a,\infty)}(x) \, d\mu$$



$h(a) \le h(x)$ $\quad \overset{\text{Monotonie}}{\le} \int_{\mathbb{R}} h(x)\, \mathbb{1}_{[a,\infty)}(x)\, dx$
$\forall x \in [a,\infty)$ weil
h monoton wachsend

$h(x)\mathbb{1}_{[a,\infty)} \le h(x)$ $\quad \overset{\text{Monotonie}}{\le} \int_{\mathbb{R}} h(x)\, d\mu$
$\forall x \in \mathbb{R}$

c)

<u>Beh:</u> $a > 0 \Rightarrow \mathbb{P}((-a,a)^c) \le 2\,\dfrac{e^{\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2}}{e^{\beta a}} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}_{\ge 0}$

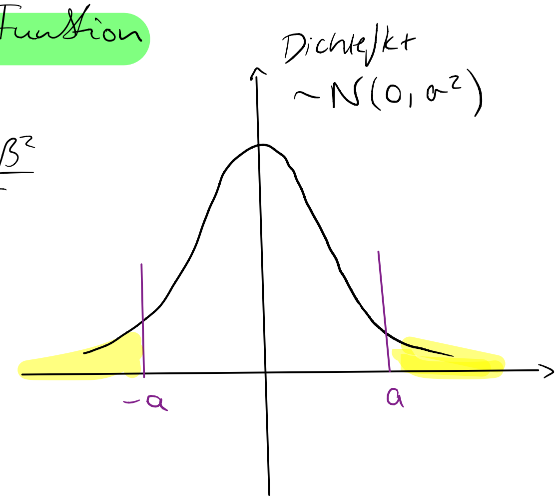
<u>Bew:</u> Sei $\beta \ge 0$. Dann ist $h: \mathbb{R} \to [0,\infty),\ x \mapsto e^{\beta x}$

eine monoton wachsende, positive Funktion

$\overset{b)}{\Longrightarrow}$ Für $a > 0$ gilt:

$$e^{\beta a}\, \mathbb{P}([a,\infty)) \le \int_{\mathbb{R}} e^{\beta x}\, d\mathbb{P} = e^{\frac{\sigma^2\beta^2}{2}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}([a,\infty)) \le \frac{e^{\frac{\sigma^2\beta^2}{2}}}{e^{\beta a}}$$



Zudem gilt mit Substitution $y = -x$:

$$\mathbb{P}((-\infty,-a]) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-\infty,-a]}(x)\, d\mathbb{P}$$

$$= \int_{-\infty}^{-a} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

$N(0,\sigma^2)$ ist symmetrisch

$$\overset{\text{Subst.}}{=} \int_{\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(-y)^2}{2\sigma^2}}\, (-1)\, dy$$

$\Big[\ x = -y$
$f'(y) = -1$
$f^{-1}(-a) = a$
„$f^{-1}(-\infty) = +\infty$" $\Big]$

$$= \int_{a}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, dy = \mathbb{P}([a,\infty)) \quad (*)$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}((-a,a)^c) = \mathbb{P}((-\infty,-a] \,\dot\cup\, [a,\infty))$$

$$\overset{\sigma\text{-Add.}}{=} \mathbb{P}((-\infty,-a]) + \mathbb{P}([a,\infty))$$

$$\overset{(*)}{=} 2\,\mathbb{P}([a,\infty))$$

$$\leq 2\,\frac{e^{\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2}}{e^{\beta a}}$$

d)

<u>Beh:</u> $\mathbb{P}((-a,a)^c) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}$ und

$$2e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \leq \frac{e^{\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2}}{e^{\beta a}} \quad \forall \beta \geq 0$$

<u>Bew:</u> Sei $g: [0,\infty) \to [0,\infty),\ \beta \mapsto \frac{e^{\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2}}{e^{\beta a}} = e^{\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2}\, e^{-\beta a} = e^{\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2 - \beta a}$
$= e^{\beta(\frac{1}{2}\beta\sigma^2 - a)}$

Als Produkt diffbare (e)-Funktionen ist g auf $(0,\infty)$ diffbar mit

$$\frac{\partial g}{\partial \beta} = g'(\beta) = (\beta\sigma^2 - a)e^{\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2 - \beta a}$$

Also gilt

$$g'(\beta) = 0 \iff (\beta\sigma^2 - a)\underbrace{e^{\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2 - \beta a}}_{>0} = 0$$

$$\iff (\beta\sigma^2 - a) = 0$$

$$\iff \beta = \frac{a}{\sigma^2}$$

Zudem gilt:

$$g''(\beta) = \sigma^2 e^{\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2 - \beta a} + (\beta\sigma^2 - a)^2 e^{\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2 - \beta a} > 0 \quad \forall \beta \geq 0$$

$\Rightarrow$ g hat an der Stelle $\frac{a}{\sigma^2}$ ein <u>lokales</u> Minimum mit

$$g\left(\frac{a}{\sigma^2}\right) = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sigma^2}\right)^2\sigma^2 - \frac{a^2}{\sigma^2}a} = e^{\frac{1}{2}\frac{a^2}{\sigma^2} - \frac{a^2}{\sigma^2}} = e^{-\frac{1}{2}\frac{a^2}{\sigma^2}}$$

Dazu gilt: $g(0) = 1 > g\left(\frac{a}{\sigma^2}\right)$ und $\lim_{\beta\to\infty} g(\beta) = \infty$

$\Rightarrow$ g hat ein <u>globales</u> Minimum in $\frac{a}{\sigma^2}$. Mit c) folgt

$$\Rightarrow \mathbb{P}((-a,a)^c) \leq 2e^{-\frac{1}{2}\frac{a^2}{\sigma^2}} \leq 2e^{\frac{1}{2}\beta^2\sigma^2 - \beta a} \quad \forall \beta \geq 0 \quad \square$$

Sei $\Omega = [0,1]$, λ Lebesguemaß.

Definiere $f_n(x) = ne^{-nx}$.

a) Die Funktion $x \longmapsto ne^{-nx}$ ist stetig auf $[0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit auch messbar.

Wir wollen nun zeigen, dass f_n λ-fast überall gegen die Nullfunktion $f \equiv 0$ konvergiert.

Sei dazu $x \in (0,1]$ beliebig. Dann gilt

$$|f_n(x) - f(x)| = |ne^{-nx} - 0|$$
$$= ne^{-nx} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad \text{da } x > 0.$$

Dies folgt z.B. mit l'Hospital:

$$ne^{-nx} = \frac{n \to \infty}{e^{nx} \to \infty} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial}{\partial n} n = 1, \quad \frac{\partial}{\partial n} e^{nx} = ne^{nx}$$

Es gilt $\frac{1}{ne^{nx}} \to 0$ für $n \to \infty$ und somit gilt auch $ne^{-nx} \to 0$, $n \to \infty$.

b) Offensichtlich ist $\int_\Omega f \, d\lambda = 0$.

Andererseits gilt

$$\int_\Omega f_n \, d\lambda = \int_0^1 ne^{-nx} \, dx \overset{HdI}{=} \left[-e^{-nx}\right]_0^1$$
$$= 1 - e^{-n} \to 1, \quad n \to \infty$$

c) Um DCT anwenden zu können, muss eine integrierbare Majorante g mit $|f_n| \leq g$ für. existieren.

Dies ist hier offensichtlich nicht der Fall.