

- Vor:
- $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  Maßraum
  - $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge von Nullmengen
  - $f, g: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mu$ -integrierbar

a) Beh:  $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$  ist Nullmenge (d.h.  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n) = 0$ )

Bew: Es gilt  $\mu(N_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  und  $\mu \geq 0$ .

Mit der Subadditivität von Maßen folgt

$$0 \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_n) = 0 \quad \square$$

b) Beh:  $f \leq g \Rightarrow \int_{\Omega} f \, d\mu \leq \int_{\Omega} g \, d\mu$

Bew: Die Nullfunktion ist eine nicht negative einfache Funktion und damit gilt.

$$\int_{\Omega} 0 \, d\mu = 0 \cdot \mu(\Omega) = 0 \quad \text{Da } g - f \geq 0.$$

nichtnegativ, messbar, numerisch

braucht man als vorw. Monotonie des Integrals für positive Funktionen. Diese erhält man über Monotonie des Integrals einfacher Funktionen und MCT, also nach 3.16 ex.  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}^+$  mit

$h_n \uparrow g - f$  und es gilt  $0 \leq h_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann folgt

$$\int_{\Omega} 0 \, d\mu \leq \int_{\Omega} h_n \, d\mu \quad \text{und über Grenzwertbildung}$$

$$\int_{\Omega} 0 \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h_n \, d\mu \stackrel{\text{MCT für } \mathcal{E}^+}{=} \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \, d\mu = \int_{\Omega} g - f \, d\mu$$

$$\Rightarrow 0 = \int_{\Omega} 0 \, d\mu \leq \int_{\Omega} g - f \, d\mu \stackrel{\text{lin.}}{=} \int_{\Omega} g \, d\mu - \int_{\Omega} f \, d\mu$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} f \, d\mu \leq \int_{\Omega} g \, d\mu$$

$\square$

c) Beh.:  $f \leq g$   $\mu$ -f.ü.  $\Rightarrow \int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu$

Bew.: Per Konstruktion gilt

$$f(\omega) \cdot \mathbb{1}_{\{f \leq g\}}(\omega) \leq g(\omega) \cdot \mathbb{1}_{\{f \leq g\}}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

$f = h$   $\mu$ -f.ü.  
 $\Rightarrow \int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} h d\mu$

Zudem gilt  $\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f \cdot \mathbb{1}_{\{f \leq g\}} d\mu$  und  $\int_{\Omega} g d\mu = \int_{\Omega} g \cdot \mathbb{1}_{\{f \leq g\}} d\mu$ ,

da sich die Integranden nur auf Nullmengen unterscheiden.

Nach b) gilt  $\int_{\Omega} f \cdot \mathbb{1}_{\{f \leq g\}} d\mu \leq \int_{\Omega} g \cdot \mathbb{1}_{\{f \leq g\}} d\mu$  und damit

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f \cdot \mathbb{1}_{\{f \leq g\}} d\mu \leq \int_{\Omega} g \cdot \mathbb{1}_{\{f \leq g\}} d\mu = \int_{\Omega} g d\mu \quad \square$$

d) Beh.:  $f < g$   $\mu$ -f.ü.  $\not\Rightarrow \int_{\Omega} f d\mu < \int_{\Omega} g d\mu$

Bsp.: Sei  $\mu \equiv 0$ , das Nullmaß also  $\mu(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$ .

Dann gilt für alle  $f < g$   $\mu$ -f.ü., dass

$$\int_{\Omega} f d\mu = 0 = \int_{\Omega} g d\mu$$

e) Beh.:  $\int_{E_1 \cup E_2} f d\mu = \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu$ , falls  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ,  $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$

Bew.:

$$\begin{aligned} \int_{E_1 \cup E_2} f d\mu &\stackrel{\text{Def.}}{=} \int_{\Omega} f \cdot \mathbb{1}_{E_1 \cup E_2} d\mu = \int_{\Omega} f \cdot \mathbb{1}_{E_1} + f \cdot \mathbb{1}_{E_2} - \underbrace{f \cdot \mathbb{1}_{E_1 \cap E_2}}_{=0} d\mu \\ &= \int_{\Omega} f \cdot \mathbb{1}_{E_1} + f \cdot \mathbb{1}_{E_2} d\mu \stackrel{\text{Lin.}}{=} \int_{\Omega} f \cdot \mathbb{1}_{E_1} d\mu + \int_{\Omega} f \cdot \mathbb{1}_{E_2} d\mu \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{=} \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu \quad \square$$

f) Bew.:  $\int_{E_1} f d\mu \leq \int_{E_2} f d\mu$  gilt nicht im Allgemeinen  
 mit  $E_1 \subseteq E_2, E_1, E_2 \in \mathcal{A}$

Bsp. Betrachte  $\overset{E_1}{[0,1]} \subseteq \overset{E_2}{[0,2]}$  und  $f \in \mathcal{E}$

mit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \mathbb{1}_{[0,1]}(x) - \mathbb{1}_{(1,2]}(x)$

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar.

$$\begin{aligned} \int_{[0,2]} f dx &= 1 \cdot \lambda([0,1]) = 1 > 1 \cdot \lambda([0,1]) + (-1) \cdot \lambda((1,2]) \\ &= \int_{[0,2]} f dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,2]}(x) (\mathbb{1}_{[0,1]}(x) - \mathbb{1}_{(1,2]}(x)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) dx + \int_{\mathbb{R}} -1 \cdot \mathbb{1}_{(1,2]}(x) dx \end{aligned}$$

g) Bew.:  $f \geq 0$  messbar und  $\int_{\mathbb{R}} f d\mu < \infty \Rightarrow f < \infty$   $\mu$ -fast überall

Bew. Angenommen  $\mu(\{f = \infty\}) > 0$

Prinzip des guten Indicators

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f d\mu &= \int_{\mathbb{R}} f \cdot \mathbb{1}_{\{f = \infty\}} + f \mathbb{1}_{\{f < \infty\}} d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{\{f = \infty\}} d\mu + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{\{f < \infty\}} d\mu}_{\geq 0, \text{ da } f \geq 0} \\ &= \int_{\{f = \infty\}} \infty d\mu + \int_{\{f < \infty\}} f d\mu \end{aligned}$$

Def. 5.11.11  $\Rightarrow \infty \cdot \underbrace{\mu(\{f = \infty\})}_{> 0} + \underbrace{\int_{\{f < \infty\}} f d\mu}_{\geq 0} = \infty$

$\Rightarrow \mu(\{f = \infty\}) = 0 \Rightarrow f < \infty$   $\mu$ -f.ü.



Vor:  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  Maßraum

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $f_n: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  Folge nichtnegativer messbarer Funktionen

Beh:  $\int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$

Bew: Sei  $g_n := \sum_{k=1}^n f_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$g_n \uparrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$  und  $g_n \geq 0$ , da  $f_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Mit dem Satz der Monotonen Konvergenz folgt

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^{\infty} f_k d\mu \stackrel{\text{Det.}}{=} \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu \stackrel{\text{MCT}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n d\mu$$

$$= \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k d\mu$$

$$\stackrel{\text{Det.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n f_k d\mu$$

$$\stackrel{\text{Lin.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} f_k d\mu$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_k d\mu \quad \square$$

(Diese Beh. wird auch Satz von Beppo Levi genannt)

Seien  $f, g$  stetig mit  $f = g$   $\lambda$ -fast überall,  
wobei  $\lambda$  das Lebesguemaß auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  sei.

Wir wollen  $f = g$  auf ganz  $\mathbb{R}$  zeigen.

Sei dazu  $x \in \mathbb{R}$  beliebig. Sei  $N = \{f \neq g\}$

Wir wissen schon  $\lambda(N) = 0$ .

Beh:  $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in B(x, \varepsilon) \cap N^c$ .

Bew: Dies folgt sofort aus  $\lambda(B(x, \varepsilon)) = 2\varepsilon > 0$ .

Falls  $B(x, \varepsilon) \cap N^c = \emptyset \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subseteq N$  und somit  
müsste  $\lambda(B(x, \varepsilon)) = 0$  gelten.  $\square$

Also können wir eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in N^c$  konstruieren,

so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  &  $f(x_n) = g(x_n) \forall n \in \mathbb{N}$ .

Da  $f, g$  stetig, folgt

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x)$$

Da  $x \in \mathbb{R}$  beliebig war, folgt  $f = g$  auf ganz  $\mathbb{R}$ .

- Vor:
- $\mathbb{P}_1 = \text{Ber}(p)$ ,  $p \in (0,1)$ , d.h.  $\mathbb{P}_1 := p \cdot \delta_1 + (1-p) \cdot \delta_0$
  - $\mathbb{P}_2 = \text{Exp}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$
  - $\mathbb{P}_3 = \mathcal{U}[a,b]$ ,  $a < b \in \mathbb{R}$

a) Ges:  $k$ -te Momente für  $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3$   $\forall k \in \mathbb{N}$ , d.h.  $\int_{\mathbb{R}} x^k d\mathbb{P}_i(x)$ ,  $i=1,2,3$

Bew: Da die Funktion  $x \mapsto x^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  stetig ist, ist sie  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$  messbar, d.h. die Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} (x^k)^+ d\mathbb{P}_i \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} (x^k)^- d\mathbb{P}_i$$

sind für  $i \in \{1,2,3\}$  und alle  $k \in \mathbb{N}$  wohldefiniert.

•  $\mathbb{P}_1$ : Wir zeigen, dass für eine  $\mathbb{P}_1$ -integrierbare Funktion  $f$   $\mathbb{P}_1 := p \delta_1 + (1-p) \delta_0$

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mathbb{P}_1 = p f(1) + (1-p) f(0) \text{ gilt.}$$

Sei dazu  $f$  eine  $\mathbb{P}_1$  integrierbare Funktion und wir

definieren  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(1) \mathbb{1}_{\{1\}}(x) + f(0) \mathbb{1}_{\{0\}}(x)$

Dann gilt  $\{0,1\}^c \subseteq \{f=g\}$  d.h.  $f(0)=g(0) \wedge f(1)=g(1)$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0,1\}^c}_{=\mathbb{R} \setminus \{0,1\}} = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\{f=g\}}_{=\mathbb{R} \setminus \{0,1\}^c} = \{f \neq g\} \stackrel{=0}{=} \emptyset$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_1(\{f \neq g\}) \stackrel{\text{Def } \mathbb{P}_1}{\leq} \mathbb{P}_1(\{0,1\}^c) = p \delta_1(\{0,1\}^c) + (1-p) \delta_0(\{0,1\}^c) = 0$$

$\Rightarrow f=g$   $\mathbb{P}_1$ -fast überall (fast sicher)

$\Rightarrow g$  ist  $\mathbb{P}_1$ -integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mathbb{P}_1 \stackrel{f=g \mathbb{P}_1\text{-f.ä.}}{=} \int_{\mathbb{R}} g d\mathbb{P}_1 = \int_{\mathbb{R}} f(1) \mathbb{1}_{\{1\}}(x) + f(0) \mathbb{1}_{\{0\}}(x) d\mathbb{P}_1(x) = f(1) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{1\}}(x) d\mathbb{P}_1(x) + f(0) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{0\}}(x) d\mathbb{P}_1(x)$$

$$\stackrel{\text{lin}}{=} f(1) \mathbb{P}_1(\{1\}) + f(0) \mathbb{P}_1(\{0\})$$

$$\stackrel{\text{Def } \mathbb{P}_1}{=} f(1) (p \delta_1(\{1\}) + (1-p) \delta_0(\{1\})) + f(0) (p \delta_1(\{0\}) + (1-p) \delta_0(\{0\}))$$

$$\stackrel{=1}{=} p f(1) + (1-p) f(0)$$

Dann gilt  $\int_{\mathbb{R}} \underbrace{(x^k)^-}_{f(x)} dP_1(x) = 0 \cdot p + 0^k \cdot (1-p) = 0$

$f(1) = (1^k)^- = 1^- = 0$   
 $f(0) = (0^k)^- = 0^k$

$$\int_{\mathbb{R}} (x^k)^+ dP_1(x) = (1^k) p + 0^k (1-p) = p$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} x^k dP_1(x) = p \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

•  $P_2$ : Nach der VL gilt

$P_2 = \text{Exp}(\lambda)$

$$\int_{\mathbb{R}} (x^k)^- dP_2(x) = \int_{\mathbb{R}} (x^k)^- \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0, \text{ da } \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) \text{ die}$$

Dichte von  $\text{Exp}(\lambda)$  ist und  $(x^k)^- = 0 \quad \forall x \geq 0$  und  $\mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) = 0 \quad \forall x < 0$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} x^k dP_2(x)$  ist wohldefiniert und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x^k dP_2(x) &= \int_{\mathbb{R}} (x^k)^+ dP_2(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x^k)^+ \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x^k \lambda e^{-\lambda x} dx \end{aligned}$$

Jetzt: Mit Induktion zeigen, dass  $\int_0^{\infty} x^k \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{k!}{\lambda^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

IA:  $k=1$ :  $\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \stackrel{\text{part. Int.}}{=} [x(-e^{-\lambda x})]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-\lambda x}) dx$

$$= 0 - 0 + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1!}{\lambda^1}$$

IV: Die Beh. gelte für  $k$ , aber festes  $k \in \mathbb{N}$ .

IS:  $\int_0^{\infty} x^{k+1} \lambda e^{-\lambda x} dx \stackrel{\text{part. Int.}}{=} [x^{k+1} (-e^{-\lambda x})]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (k+1) x^k (-e^{-\lambda x}) dx$

$$\begin{aligned}
 &= 0 - 0 + (k+1) \int_0^{\infty} x^k e^{-\lambda x} dx \\
 &= \frac{(k+1)}{\lambda} \int_0^{\infty} x^k \lambda e^{-\lambda x} dx \\
 &\stackrel{\text{IV}}{=} \frac{(k+1)}{\lambda} \cdot \frac{k!}{\lambda^k} = \frac{(k+1)k!}{\lambda \cdot \lambda^k} = \frac{(k+1)!}{\lambda^{k+1}}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} x^k dP_2(x) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

•  $P_3$ : Es gilt  $\int_{\mathbb{R}} |x|^k dP_3(x) = \int_{\mathbb{R}} |x|^k \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) dx$   $P_3 = \mathcal{U}(a,b]$

$$\int_{\mathbb{R}} x^k dP_3(x) \stackrel{x^k \leq |x|^k}{\leq} \int_{\mathbb{R}} |x|^k dP_3$$

$$= \int_a^b |x|^k \frac{1}{b-a} dx$$

$$\stackrel{\text{⊗}}{\leq} \int_a^b \frac{1}{b-a} \max\{|a|^k, |b|^k\} dx$$

$$\stackrel{\text{lin}}{=} \frac{\max\{|a|^k, |b|^k\}}{b-a} \int_a^b 1 dx$$

$$= \max\{|a|^k, |b|^k\} < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

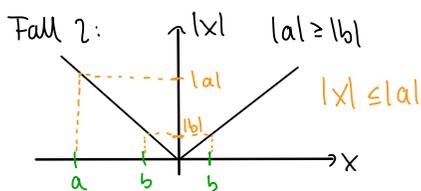
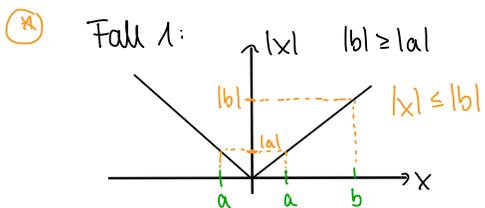
$\Rightarrow x^k$  ist somit  $P_3$  integrierbar für alle  $k \in \mathbb{N}$

Dann gilt  $\int_{\mathbb{R}} x^k dP_3(x) = \int_{\mathbb{R}} x^k \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) dx$

$$\stackrel{\text{lin}}{=} \frac{1}{b-a} \int_a^b x^k dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[ \frac{1}{k+1} x^{k+1} \right]_a^b$$

$$= \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \square$$



Vor:  $P_\mu = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 > 0$

b) Ges:  $\int_{\mathbb{R}} e^{\beta x} dP_\mu(x)$  für  $\beta \in \mathbb{R}$

Lsg: Da  $e^{\beta x} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$  gilt, ist das Integral wohldefiniert

Nach der Vorlesung gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \underbrace{(e^{\beta x})^-}_{=0} dP_\mu(x) = 0 < \infty$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\beta x} dP_\mu(x) \stackrel{\downarrow}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{\beta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\beta x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{1}{2\sigma^2} (2\sigma^2\beta x - (x-\mu)^2)} dx$$

Mit quadratischer Ergänzung gilt

$$2\sigma^2\beta x - (x-\mu)^2 = 2\sigma^2\beta x - x^2 + 2\mu x - \mu^2$$

$$= -(x^2 - 2(\sigma^2\beta + \mu)x + \mu^2)$$

$$= -(x^2 - 2(\sigma^2\beta + \mu)x + (\sigma^2\beta + \mu)^2)$$

$$- (\sigma^2\beta + \mu)^2 + \mu^2$$

$$= -((x - (\sigma^2\beta + \mu))^2 - (\sigma^2\beta + \mu)^2 + \mu^2)$$

$$= -(x - (\sigma^2\beta + \mu))^2 + (\sigma^2\beta + \mu)^2 - \mu^2$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{\beta x} dP_\mu(x) = e^{((\sigma^2\beta + \mu)^2 - \mu^2) \frac{1}{2\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{1}{2\sigma^2} (-(x - (\sigma^2\beta + \mu))^2)} dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2} (-(x - (\sigma^2\beta + \mu))^2 + (\sigma^2\beta + \mu)^2 - \mu^2)\right) dx$$

= f

$$= \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2} (-(x - (\sigma^2\beta + \mu))^2)\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2} ((\sigma^2\beta + \mu)^2 - \mu^2)\right)$$

Da  $f$  die Dichte von  $N(\sigma^2\beta + \mu, \sigma^2)$  ist, gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{\beta x} dP_{\sigma}(x) &= e^{\frac{1}{2\sigma^2} ((\sigma^2\beta + \mu)^2 - \mu^2)} \\ &= e^{\frac{1}{2\sigma^2} (\sigma^4\beta^2 + 2\sigma^2\beta\mu + \mu^2 - \mu^2)} \\ &= e^{\frac{\sigma^2\beta^2}{2} + \beta\mu} \end{aligned}$$

□

Vor:  $P_s = \text{Cauchy}(s, t)$ ,  $s > 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$

c) Beh:  $\int_{\mathbb{R}} x dP_s(x)$  ist nicht wohldefiniert.

Bew: Betrachte jeweils Integral über Negativ und Positivteil.

$$\int_{\mathbb{R}} x^+ dP_s(x) = \int_0^{\infty} x dP_s(x) = \int_0^{\infty} x \frac{1}{\pi} \frac{s}{s^2 + (x-t)^2} dx$$

$$[\text{Subst. } \overset{\phi(x)}{y} = \frac{(x-t)}{s} \Rightarrow dx = s dy] = \int_{-\frac{t}{s}}^{\infty} (sy+t) \frac{1}{\pi} \frac{s}{s^2 + s^2 y^2} s dy$$

$$x = sy + t \Rightarrow \frac{dx}{dy} = s$$

$$\phi(0) = -\frac{t}{s}, \quad \phi(+\infty) = +\infty$$

$$= \int_{-\frac{t}{s}}^{\infty} (sy+t) \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2} dy$$

$$\stackrel{\text{lin}}{=} \int_{-\frac{t}{s}}^0 (sy+t) \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2} dy + s \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{1+y^2} dy + t \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2} dy$$

Da die Funktion  $y \mapsto (sy+t) \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2}$  stetig ist, ist sie auf dem Intervall  $[-\frac{t}{s}, 0]$ , bzw.  $[0, -\frac{t}{s}]$  (falls  $t \geq 0$  oder  $t < 0$ ) beschränkt, weshalb

$$\int_{-\frac{t}{s}}^0 (sy+t) \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+y^2} dy \leq \sup_{y \in [-\frac{t}{s}, 0]} \underbrace{\left( (sy+t) \frac{1}{\sigma} \right)}_{\leq t} \underbrace{\frac{1}{1+y^2}}_{\leq 1} \underbrace{\int_{-\frac{t}{s}}^0 1 dy}_{\frac{t}{s}} < \infty \text{ gilt.}$$

Da  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+x^2} dx = 1$  gilt, gilt

$$t \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+x^2} dx \leq t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1+x^2} dx = t$$

$\geq 0$

Mit dem Reihenkriterium aus Ana 2 gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \frac{k}{1+k^2} = \frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+k^2} > \frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+k^2}$$

$$= \frac{1}{2\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Harmonische Reihe

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma} \frac{y}{1+y^2} dy = \infty$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} x^+ dP_S(x) = \infty. \text{ Betrachte nun die Substitution } y = -x \Rightarrow dy = -dx$$

$\phi(x) = -x$

$$\int_{\mathbb{R}} x^- dP_S(x) = \int_{-\infty}^0 (-x) \frac{1}{\sigma} \frac{s}{s^2 + (x-t)^2} dx$$

$x^- = -\min\{0, x\} \stackrel{x \leq 0}{=} -x$

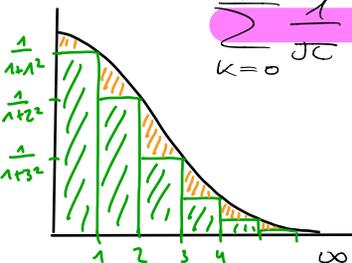
$$= \int_0^{\infty} y \frac{1}{\sigma} \frac{s}{s^2 + (-y-t)^2} (-1) dy$$

$$= \int_0^{\infty} y \frac{1}{\sigma} \frac{s}{s^2 + (y+t)^2} dy = \int_{\mathbb{R}} x^+ dP_S'(x)$$

mit  $P_S' = \text{Cauchy}(s, -t)$ .

$\int_{\mathbb{R}} x^+ dP_S(x)$  war nicht von  $t$  abhängig, damit folgt

$$\int_{\mathbb{R}} x^+ dP_S'(x) = \int_{\mathbb{R}} x^+ dP_S(x) = \int_{\mathbb{R}} x^- dP_S(x) = \infty$$



Da  $\int_{\mathbb{R}} x^- dP_S(x) = \infty$  und  $\int_{\mathbb{R}} x^- dP_S(x) = \infty$  ist

$\int_{\mathbb{R}} x dP_S(x)$  nicht wohldefiniert ( $\infty - \infty$   $\nexists$ )

d) Ges:  $\int_{\mathbb{R}} e^{\beta x} dP_2(x)$  für  $\beta \in \mathbb{R}$  ( $P_2 = \text{Exp}(\lambda), \lambda > 0$ )

Lsg: Da  $e^{\beta x} > 0 \forall x \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$  ist das Integral wohldefiniert (Negativteil gleich Null).

Unterscheide 2 Fälle:

$$\begin{aligned}
 1) \beta \neq \lambda: \int_{\mathbb{R}} e^{\beta x} dP_2(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{\beta x} \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) dx \\
 &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda - \beta)x} dx \\
 &= \left[ -\frac{\lambda}{\lambda - \beta} e^{-(\lambda - \beta)x} \right]_0^{\infty} \\
 &= \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda - \beta}, & \lambda > \beta \Rightarrow \lambda - \beta > 0 \Rightarrow -(\lambda - \beta) < 0 \\ \infty, & \lambda < \beta \Rightarrow \lambda - \beta < 0 \Rightarrow -(\lambda - \beta) > 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$2) \beta = \lambda: \int_{\mathbb{R}} e^{\beta x} dP_2(x) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\underbrace{(\lambda - \beta)}_{=0} x} dx = \int_0^{\infty} \lambda dx = \infty$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{\beta x} dP_2(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda - \beta} & , \beta < \lambda \\ \infty & , \beta \geq \lambda \end{cases}$$

□

a) Vor:  $f \in \mathcal{E}^+$

Beh:  $\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{a \in f(\Omega)} \int_{\Omega} a \mathbb{1}_{\{f=a\}} d\mu$

Bew:  $f \in \mathcal{E}^+$ , also hat  $f$  eine Darstellung

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$$

$\alpha_k \mathbb{1}_{A_k} \geq 0$ , messbar, Lin

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k} d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mu(A_k)$$

[Per Definition waren die]  $= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mu(\{f = \alpha_k\})$

[ $A_k := \{f = \alpha_k\}$ ]  $= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{f = \alpha_k\}} d\mu$

Die  $\alpha_k$  sind alle aus  $f(\Omega)$

Lin  $= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} \alpha_k \mathbb{1}_{\{f = \alpha_k\}} d\mu$

$$= \sum_{a \in f(\Omega)} \int_{\Omega} a \mathbb{1}_{\{f=a\}} d\mu$$

b) Beh:  $f, g$  messbar,  $|f| \leq g$   $\mu$ -f.ü. und  $g$   $\mu$ -int  $\Rightarrow f$   $\mu$ -integrierbar.

Bew: Es reicht zu zeigen, dass  $\int_{\Omega} |f| d\mu < \infty$ , da

$|f|$  int  $\Rightarrow f$  int  $\int_{\Omega} |f| d\mu < \infty \Rightarrow \int_{\Omega} f^+ d\mu < \infty$  und  $\int_{\Omega} f^- d\mu < \infty. \rightarrow f$   $\mu$ -integrierbar

Mit der Monotonie des Integrals fast überall folgt

$$\int_{\Omega} |f| d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu < \infty \text{ nach Voraussetzung}$$

c) Betr.:  $f, g$  stetig und  $f = g \lambda$ -f.ä.  
 $\Rightarrow f = g$  auf ganz  $\mathbb{R}$

Bew.: Angenommen es existiert ein  $x_0 \in \mathbb{R}$  mit

$f$  stetig in  $x_0 \in \mathbb{R}$ :  
 $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0: \forall x \in \mathbb{R}$   
mit  $|x - x_0| < \varepsilon$   
 $\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$

$f(x_0) \neq g(x_0)$ . Da  $f$  und  $g$  stetig sind existieren  
für jedes  $\delta > 0, \varepsilon_f, \varepsilon_g > 0$  mit

$$|f(x_0) - f(x)| < \delta \quad \forall x \in [x_0 - \varepsilon_f, x_0 + \varepsilon_f] \quad |x - x_0| < \varepsilon_f$$

und  $|g(x_0) - g(x)| < \delta \quad \forall x \in [x_0 - \varepsilon_g, x_0 + \varepsilon_g]$

D.h. es existiert  $\varepsilon > 0$ , sodass

$$f(x) \neq g(x) \quad \forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]. \quad |x - x_0| < \varepsilon$$

Also  $f \neq g$  auf  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ .

$$\lambda([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]) = x_0 + \varepsilon - x_0 + \varepsilon = 2\varepsilon > 0$$

$\Rightarrow f = g$  gilt nicht  $\lambda$ -f.ä.  $\square$

