a) • Def 3.1.2 Definition des Lebesgue-Integrals für einfache Funktionen

• Def 3.1.5 Definition des Lebesgue-Integrals für nicht-negative messbare numerische Funktionen f als Supremum aller Integrale von einfachen Funktionen $g \leq f$

• Def 3.1.9 Definition des Integrals messbarer numerischer Funktionen f als Summe der Integrale des Positiv- und des Negativteils von f wie in Def 3.1.5, falls mind. eines dieser Integrale endlich ist.

b) Satz 3.1.6: Jede nicht-negative messbare numerische Funktion f kann durch eine wachsende Folge von einfachen Funktionen punktweise approximiert werden.

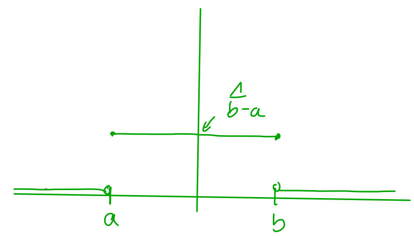
Der Satz wird bewiesen, indem wir für eine beliebige nicht-neg., messbare numerische Funktion f die Folge konkret angeben und zeigen, dass diese die geforderten Eigenschaften erfüllt.

c) Das Integral einer messbaren Funktion f ist nach Def 3.1.9 wohldefiniert, wenn es die Definition erfüllt, wenn also mind. eines der Integrale über Positiv- oder Negativteil endlich ist.
Sind beide endlich so heißt f μ-integrierbar
$\Rightarrow$ das Integral existiert.
Aus Integrierbarkeit folgt also Wohldefiniertheit.

Geg: $F_1: \mathbb{R}\to[0,1],\ x\mapsto \frac{x-a}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)+\mathbb{1}_{(b,\infty)}(x)$, $a,b\in\mathbb{R},\ a<b$

$F_2: \mathbb{R}\to[0,1],\ x\mapsto \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\,(1-e^{-\lambda x}),\ \lambda>0$

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+,\ x\mapsto \frac{1}{\pi}\,\frac{s}{s^2+(x-t)^2}$



a)

Beh: i) $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_0^+,\ x\mapsto \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$
ist Dichte von F_1.

ii) $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_0^+,\ x\mapsto \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$
ist Dichte von F_2.

Bew:

i) Sei $t\in\mathbb{R}$: $$\int_{-\infty}^{t} f_1(x)\,dx = \begin{cases} 0, & t<a\\ \int_a^t \frac{1}{b-a}\,dx, & a\le t\le b\\ \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx, & t>b \end{cases}$$ $\left(=\left[\frac{x}{b-a}\right]_a^b\right)$

$\int_{-\infty}^{t} f_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t}\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,dx$

$= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,\mathbb{1}_{(-\infty,t]}(x)\,dx$

$= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]\cap(-\infty,t]}(x)\,dx$

$$= \begin{cases} 0, & t<a\\ \frac{t-a}{b-a}, & a\le t\le b\\ \frac{b-a}{b-a}=1, & b<t \end{cases} = F_1(t)$$

Zudem ist f_1 messbar, da $\frac{1}{b-a}$ eine Konstante ist und die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_{[a,b]}$ messbar ist. Außerdem gilt $f_1\ge 0$ und $\int_{\mathbb{R}} f_1(x)\,dx = 1$.

$\Rightarrow f_1$ ist Dichtefunktion von F_1.

ii) Sei $t\in\mathbb{R}$: $$\int_{-\infty}^{t} f_2(x)\,dx = \begin{cases} 0, & t<0\\ \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx, & t\ge 0\end{cases}$$

$$= \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_2(x)\,dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{n\to\infty} [-e^{-\lambda x}]_0^n = \lim_{n\to\infty} (1-e^{-\lambda n}) = 1-0=1$$

$$= \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)\,\overbrace{[-e^{-\lambda x}]_0^t}^{-e^{-\lambda t}-(-e^{-\lambda 0}) = -e^{-\lambda t}+1}$$

$$= \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)\,(1-e^{-\lambda t}) = F_2(t)$$

Zudem ist f_2 als Produkt einer (auf dem Indikator) stetigen Funktion und einer Indikatorfunktion einer messbaren Menge messbar. Mit $f_2 \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} f_2\,dx = 1$ folgt

$\Rightarrow f_2$ ist Dichtefunktion von F_2.

b) <u>Bel:</u> Für $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x \mapsto \mathbb{1}_{[0,\sqrt{3}]}(x)\,\frac{2}{3}x$ und $G(t) := \int_{-\infty}^t g(x)\,dx\ \forall t\in\mathbb{R}$

gilt $\mathbb{P}_G((-\infty,1)) = \frac{1}{3}$ und $\mathbb{P}_G([1,\infty)) = \frac{2}{3}$

<u>Bew:</u> g ist messbar (vgl. 1 a) f_2), $g\geq 0$ und

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{3}x\,dx = \left[\frac{1}{3}x^2\right]_0^{\sqrt{3}} = 1$$

$\Rightarrow g$ ist Dichtefunktion

Sei $t\in\mathbb{R}$:

$$G(t) = \int_{-\infty}^t g(x)\,dx = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \int_0^t \frac{2}{3}x\,dx \ \left(= [\frac{1}{3}x^2]_0^t = \frac{1}{3}t^2\right), & 0\leq t\leq\sqrt{3} \\ 1, & t>\sqrt{3} \quad \left(= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{3}x\,dx = 1\right) \end{cases} = \mathbb{1}_{[0,\sqrt{3}]}(t)\,\frac{1}{3}t^2 + \mathbb{1}_{(\sqrt{3},\infty)}(t)$$

G ist stetig (weil diff'bar), daher gilt (vgl. Gr.Üb)

$$\mathbb{P}_G((-\infty,1)) \underset{\mathbb{P}_G(\{1\})=0}{=} \mathbb{P}_G((-\infty,1]) = G(1) = \frac{1}{3}$$ und

$$\mathbb{P}_G([1,\infty)) \underset{\text{PW-Maß}}{=} 1-\mathbb{P}_G((-\infty,1]) = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$ $\square$

geg: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ x \longmapsto \frac{1}{\pi} \frac{s}{s^2+(x-t)^2}$,

$s, t \in \mathbb{R},\ s > 0$

c) <u>Beh:</u> f ist Dichtefunktion

<u>Bew:</u> $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{s}{s^2+(x-t)^2}\,dx$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s+\frac{1}{s}(x-t)^2}\,dx$$

Substitution mit $y = \frac{x-t}{s}$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{(x-t)}{s}\right)^2} \frac{1}{s}\,dx$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{s} \Rightarrow dy = \frac{1}{s}dx$

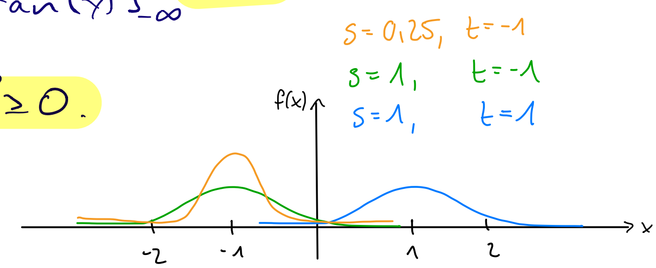
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\arctan(y)\right]_{-\infty}^{\infty} = 1$$

$\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \pi$

f ist messbar, da stetig und $f \geq 0$.

$\Longrightarrow$ f ist Dichtefunktion



<u>Interpretation von s und t:</u>

f wird für Werte von x in der Nähe von t „groß", d.h. t gibt das Zentrum der Masse an. Für kleine Werte von s sind die Werte von f in der Nähe von t größer und für große s kleiner. s gibt also an wie gestreut die Masse auf $\mathbb{R}$ verteilt ist.

d) $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{c_p} x^{-p} \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$

<u>Beh:</u> Für $c_p = \frac{1}{p-1}$ ist g eine Dichtefunktion, $p > 1$

<u>Bew:</u> Sei $p > 1$ beliebig. $g \geq 0$ und g (auf Indikator) stetig, also g messbar.

$c_p > 0$, da $p > 1$

$x^{-p} > 0$ auf $\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$

Dazu gilt $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{C_p} x^{-p} \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)\,dx$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \frac{1}{C_p} \int_{1}^{\infty} x^{-p}\,dx$$

$$= \frac{1}{C_p} \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right]_1^{\infty} = \frac{1}{C_p} \cdot \frac{1}{1-p} \cdot \Big(\underbrace{\lim_{n\to\infty} n^{\overset{<0}{\widetilde{1-p}}}}_{=0} - \underbrace{1^{1-p}}_{-1} \Big)$$

$$= \frac{1}{C_p} \frac{1}{p-1}$$

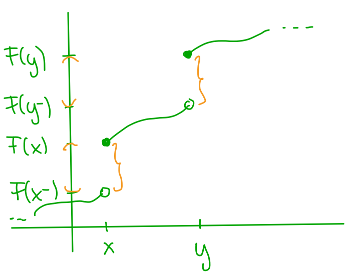
$\Rightarrow$ für $C_p = \frac{1}{p-1}$ gilt $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = 1$

$\Rightarrow$ für $C_p = \frac{1}{p-1}$ ist g eine Dichtefunktion

a) **Beh:** Jede Verteilungsfunktion hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen

Bew: i) Nach der Gr. Üb ist $x \in \mathbb{R}$ genau dann eine Unstetigkeitsstelle, wenn $F(x^-) < F(x)$ gilt.

$= \lim_{s \uparrow x} F(s)$



ii) Für $x \neq y \in \mathbb{R}$ mit $F(x^-) < F(x)$ und $F(y^-) < F(y)$ gilt $(F(x^-), F(x)) \cap (F(y^-), F(y)) = \emptyset$ da F monoton wachsend ist.

iii) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $F(x^-) < F(x)$ $\exists q_x \in \mathbb{Q}$, sodass $F(x-) < q_x < F(x)$
$q_x \in (F(x^-), F(x))$, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$.

iv) Sei $U := \{x \in \mathbb{R} \mid F \text{ unstetig in } x\}$ und
$\varphi : U \to \mathbb{Q}$, $u \mapsto \varphi(u) := q_u$ (wie in iii)
mit $q_u \in (F(u^-), F(u))$

v) Wegen ii) ist φ injektiv („jedes q hat nur max. ein Urbild")
sonst: $\exists u' \in U$: $q_u \in (F(u'^-), F(u'))$ ↯

Zusammen gilt

$$U = \varphi^{-1}(\mathbb{Q}) \overset{\mathbb{Q}\text{ abz.}}{=} \varphi^{-1}\Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}\Big) \overset{\text{Ana } 1}{=} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \underbrace{\varphi^{-1}(\{q\})}_{\text{abz.}}$$

Das Urbild $\varphi^{-1}(\{q\})$ ist aufgrund der Injektivität höchstens ein Element, also insbesondere abzählbar.

$\Rightarrow$ U ist als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar.

a) **Beh:** Falls f messbar ist gilt:

$$f \text{ integrierbar} \Leftrightarrow |f| \text{ integrierbar}$$

Bew: Sei μ ein Maß auf $\mathcal{A}$ bzgl. dem wir integrieren

„$\Leftarrow$" gilt offensichtlich, da

$$\int_\Omega f^+ \, d\mu \overset{\text{Mon}}{\leq} \int_\Omega |f| \, d\mu \overset{|f| \text{ int.}}{<} \infty \text{ und } \int_\Omega f^- \, d\mu \overset{\text{Mon}}{\leq} \int |f| \, d\mu \overset{|f| \text{ int.}}{<} \infty$$

„$\Rightarrow$": Es gilt $\int_\Omega f^+ + f^- \, d\mu < \infty$ und

$$|f|^+ = \max\{0, |f|\} = f^+ + f^-$$

$$|f|^- = -\min\{0, |f|\} \overset{|f| \geq 0}{=} 0 \text{. Damit folgt}$$

$$\int_\Omega |f|^+ \, d\mu = \int_\Omega f^+ + f^- \, d\mu < \infty \quad \text{und} \int_\Omega |f|^- \, d\mu \overset{|f|^- = 0}{=} 0$$

$\Rightarrow$ $|f|$ ist integrierbar

b) **Beh:** f messbar $\not\Leftarrow$ $|f|$ messbar

Bew: Sei A eine nicht-messbare Teilmenge von Ω, also $A \subseteq \Omega$, $A \notin \mathcal{A}$. Dann ist

$f(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ -1, & \omega \notin A \end{cases}$

$f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \mathbb{1}_A(\omega) - \mathbb{1}_{A^c}(\omega)$ nicht messbar,

da z.B. $\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ aber $f^{-1}(\{1\}) = A \notin \mathcal{A}$.

$\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$: $f^{-1}(B) \notin \mathcal{A}$

$f^{-1}(\{1\}) = \{\omega : f(\omega) = 1\}$
$= \{\omega : \omega \in A\} = A$

$|f|(\omega) = 1 \quad \forall \omega \in \Omega$, daher gilt für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$|f|^{-1}(B) = \begin{cases} \Omega, & 1 \in B \\ \emptyset, & 1 \notin B \end{cases} \Rightarrow |f| \text{ messbar}$$

$= \{\omega : |f|(\omega) \in B\}$
$= \{\omega : 1 \in B\}$

$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$: $|f|^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

$\square$

Vor: • $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von reellen Zahlen
• $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,\infty],\ B \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{x_n}(B)$ Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$
• $f,g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen

$\delta_{x_n}(B) = \begin{cases} 1, & x_n \in B \\ 0, & x_n \notin B \end{cases}$

Beh: $f = g$ μ-fast überall $\Leftrightarrow f(x_n) = g(x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$

Bew: Es gilt: $f = g$ μ-fast überall

$$\overset{\text{Def } \mu\text{-fü}}{\Longleftrightarrow} \mu(\{f \neq g\}) = 0$$

$$\overset{\text{Def } \mu}{\Longleftrightarrow} \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{x_n}(\{x\in\mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

$$\overset{\delta_{x_n} \geq 0,\ \text{da Maß}}{\Longleftrightarrow} \delta_{x_n}(\{x\in\mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\overset{\text{Def } \delta_{x_n}}{\Longleftrightarrow} x_n \notin \{x\in\mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Longleftrightarrow x_n \in \{x\in\mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\}\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Longleftrightarrow f(x_n) = g(x_n)\ \forall n\in\mathbb{N} \qquad \square$$