Satz 1.2.12

Um die Gleichheit zweier endlicher Maße auf einer σ-Algebra zu zeigen, genügt es die Gleichheit der Maße auf einem schnittstabilen Erzeuger zu zeigen.

Satz 2.1.4

Um die Messbarkeit von einer Abbildung $f: \Omega \to \Omega'$ bzgl. einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ und einer σ-Algebra $\mathcal{A}'$ zu zeigen, genügt es die Messbarkeit von f auf einem Erzeuger zu zeigen.

Beweis von Satz 2.1.4

Ausschnitt

$$\mathcal{A}' \underset{\substack{\text{Nach Vor.}\\ \mathcal{E}' \text{ Erz.}\\ \text{von } \mathcal{A}'}}{=} \sigma(\mathcal{E}') \underset{\substack{\text{Nach Annahme}\\ \mathcal{E}' \subseteq \mathcal{F}'\\ \text{Monotonie}}}{\subseteq} \sigma(\mathcal{F}') \underset{\substack{\text{gilt, falls}\\ \mathcal{F}' \text{ selbst}\\ \sigma\text{-Alg.}}}{=} \mathcal{F}' \underset{\substack{\text{nach}\\ \text{Def von } \mathcal{F}'}}{\subseteq} \mathcal{A}'$$

$\Rightarrow \mathcal{F}' = \mathcal{A}'$

Beweisbausteine:

1. Definition von $\mathcal{F}'$, so dass $\mathcal{F}'$ alle Mengen aus $\mathcal{A}'$ enthält, für die f die Messbarkeitseigenschaft erfüllt.
2. Argumentation warum $\mathcal{F}' = \mathcal{A}'$, falls $\mathcal{F}'$ eine σ-Algebra ist, dh. Reduktion auf die fehlenden Beweisteile.
3. Beweis, dass $\mathcal{F}'$ eine σ-Algebra ist durch das Zeigen der Eigenschaften.

Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge $(\Omega, \mathcal{A}) - (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbarer Funktionen.

a) Sei $g_1(\omega) := \sup_{n\geq 1} f_n(\omega)$.

Wähle den Erzeuger $\mathcal{E} = \{(-\infty, t) : t \in \mathbb{R}\}$. Dann gilt

$$\{g_1 < t\} = \{\sup_{n\geq 1} f_n < t\}$$
$$= \{f_n < t \ \forall n \geq 1\}$$
$$= \bigcap_{n\geq 1} \underbrace{\{f_n < t\}}_{\in \mathcal{A}, \text{ nach Vor.}} \in \mathcal{A}$$
, da stabil unter abz. Schnitten

Da es reicht, Messbarkeit auf einem Erzeuger zu überprüfen, folgt die Messbarkeit von g_1.

Für $g_2(\omega) := \liminf_{n\to\infty} f_n(\omega)$ argumentieren wir wie folgt:

Mit Definition des Limes inferior ist

$$g_2 = \liminf_{n\to\infty} f_n = \underbrace{\sup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\inf_{k\geq n} f_k}_{\text{messbar nach Ga}}}_{\text{messbar, siehe oben}}$$
eine messbare Funktion, da f_n messbar $\forall n$

Analog gilt mit Definition des Limes superior

$$g_3 = \limsup_{n\to\infty} f_n = \underbrace{\inf_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\sup_{k\geq n} f_k}_{\text{messbar, siehe oben}}}_{\text{messbar nach GÜ}}$$

Also ist auch g_3 $(\mathcal{A}-\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar.

b) Falls der Grenzwert existiert, so gilt

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(\omega) = \limsup_{n\to\infty} f_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$$

und mit a) ist $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ folglich messbar.

$$\begin{tikzcd}
(\Omega, \mathcal{A}) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left=40, "g \circ f"] & (\Omega', \mathcal{A}') \arrow[r, "g"] \arrow[l, bend left, "f^{-1}(g^{-1}(A))"] & (\Omega'', \mathcal{A}'') \arrow[l, bend left, "g^{-1}(A)"] \arrow[ll, bend right=30, "(g\circ f)^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$A \in$

Geg: Messbare Räume $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$, $(\Omega'', \mathcal{A}'')$

$f: \Omega \to \Omega'$, $g: \Omega' \to \Omega''$ messbare Funktionen

a) **Beh:** $g \circ f$ ist $(\mathcal{A}, \mathcal{A}'')$-messbar

Bew: Sei $A \in \mathcal{A}''$. Dann gilt $g^{-1}(A) \in \mathcal{A}'$, da g messbar.

Da f messbar ist gilt $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{A}'$.

Dann gilt $f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{A}$.

$\Rightarrow \overbrace{f^{-1}(g^{-1}(A))}^{=(g\circ f)^{-1}} \in \mathcal{A} \quad \forall A \in \mathcal{A}''$

$\Rightarrow g \circ f$ ist $(\mathcal{A}, \mathcal{A}'')$-messbar $\square$

b) **Beh:** $\sigma(f)$ ist die kleinste σ-Algebra bzgl. der f messbar ist.

Bew: Dass $\sigma(f) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}'\}$ eine σ-Algebra ist habt ihr auf einem ÜB gezeigt.

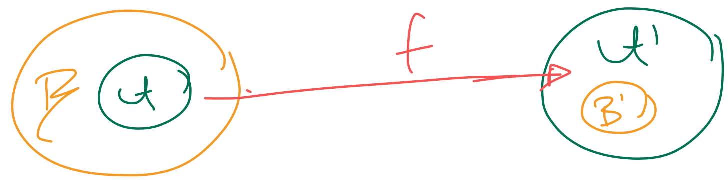
Per Definition ist f $(\sigma(f), \mathcal{A}')$-messbar.

Sei nun $\mathcal{A}_0$ eine σ-Algebra, so dass f $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}')$-messbar ist. Dann gilt $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_0 \ \forall A \in \mathcal{A}'$.

Also ist $\sigma(f) \subseteq \mathcal{A}_0$

$\Rightarrow \sigma(f)$ ist die kleinste σ-Algebra bzgl. der f messbar ist.

$\square$



c) <u>Vor:</u> f $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-messbar und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}'$ σ-Algebren

<u>Beh:</u> f $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$-messbar

<u>Bew:</u> Sei $A \in \mathcal{B}'$ beliebig. Dann gilt $A \in \mathcal{A}'$ wegen $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}'$. Zudem gilt $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ weil f $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-messbar ist. Wegen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ gilt auch $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$.

$\Rightarrow$ f $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$-messbar. $\square$

Geg: $(\Omega, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $g: \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. $\{f \leq t\} \in \mathcal{A} \ \forall t \in \mathbb{R}$

Beh: $\overset{1)}{\alpha f}$, $\overset{2)}{f+g}$, $\overset{3)}{f-g}$, $\overset{4)}{f \cdot g}$ sind messbare Funktionen und die Menge der $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbaren Funktionen ist Vektorraum.

Bew: Da es ausreicht Messbarkeit auf einem Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ zu zeigen. Wir zeigen zunächst, dass

1) $\{\alpha f \leq t\} := (\alpha f)^{-1}((-\infty, t]) \in \mathcal{A} \ \forall t \in \mathbb{R}$

gilt. Dies reicht aus, da $\{(-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\}$ ein Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist. Sei $\alpha \neq 0$ und $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\{\alpha f \leq t\} = \{f \leq \frac{t}{\alpha}\} \in \mathcal{A}$, da $\frac{t}{\alpha} \in \mathbb{R}$ und f messbar ist. Für $\alpha = 0$ gilt zudem:

$$\{\alpha f \leq t\} = \{0 \leq t\} = \begin{cases} \emptyset, & t < 0 \\ \Omega, & t \geq 0 \end{cases} \in \mathcal{A}. \quad (\sigma\text{-Algebra Eig.})$$

$\Rightarrow \{\alpha f \leq t\} \in \mathcal{A} \ \forall \alpha, t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha f$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar

2) Da $\{(-\infty, t) : t \in \mathbb{R}\}$ ebenfalls ein Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist, reicht es zudem aus zu zeigen, dass $(f+g)^{-1}((-\infty, t)) = \{f+g < t\} \in \mathcal{A}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\omega \in \{f+g < t\} \iff f(\omega) + g(\omega) < t \iff f(\omega) < t - g(\omega)$$

$$\iff \exists q \in \mathbb{Q}: f(\omega) < q < t - g(\omega),$$

wobei die letzte Äquivalenz gilt, da die rationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegen. Also gilt

$$\omega \in \{f+g<t\} \Longleftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : f(\omega)<q \wedge q<t-g(\omega)$$

$$\Longleftrightarrow \omega \in \underbrace{\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \underbrace{\left(\underbrace{\{f<q\}}_{\in\mathcal{A}} \cap \underbrace{\{q<t-g\}}_{\in\mathcal{A}}\right)}_{\in\mathcal{A}}}_{\in\mathcal{A}\text{, da } \mathbb{Q} \text{ abzählbar}}$$

f, g messbar
∩-Stabilität von σ-Algebren (abzählbare)
∪-Stabilität von – " –

$\Rightarrow f+g$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar

3) Mit $\alpha=-1$ ist auch $\alpha g=-g$ messbar (mit 1) und daraus folgt, dass $f-g=f+(-g)$ messbar ist. (mit 2)

Für Vektorraum $\mathcal{F}$ müssen wir noch Abgeschlossenheit unter punktweiser Addition und skalarer Multiplikation

Seien $f, g, h \in \mathcal{F}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $x \in \Omega$

Dann gilt $((f+g)+h)(x) = (f+g)(x)+h(x)$

$$= f(x)+g(x)+h(x)$$

$= f(x) + (g+h)(x)$

$\Rightarrow$ Assoziativgesetz

Sei 0 die Nullfunktion. Dann gilt

$$(f+0)(x) = f(x) + \underbrace{0(x)}_{\text{als Konstante messbar}} = f(x)$$

$\Rightarrow$ Existenz eines neutralen Elements

f messbar $\overset{\text{mit } 17}{\Rightarrow}$ $-f$ messbar und $(f+(-f))(x) = f(x) - f(x) = 0$

$\Rightarrow$ Existenz eines Inversen Elements

$\Rightarrow$ Die Kommutativität folgt aus der Kommutativität von $(\mathbb{R},+)$.

$$(\alpha(f+g))(x) = \alpha(f+g)(x)$$
$$= \alpha(f(x)+g(x))$$
$$= \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x)$$

$\Rightarrow$ Distributivgesetz

$(1\cdot f)(x) = 1\cdot f(x) = f(x) \Rightarrow$ Neutralität der 1

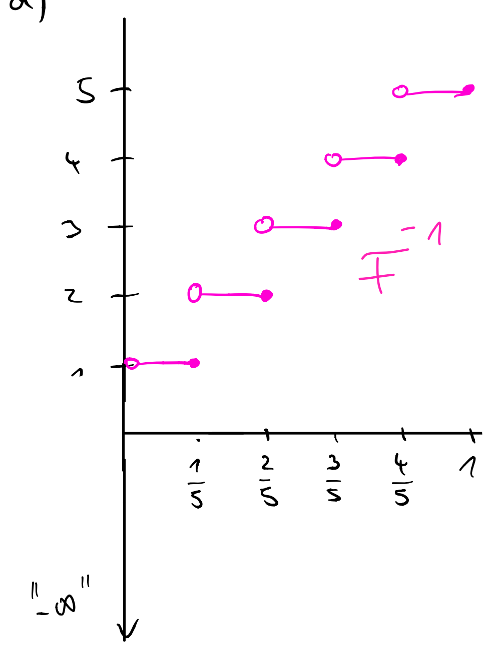
$\Rightarrow$ Die Menge der $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbaren Funktionen F ist ein Vektorraum.

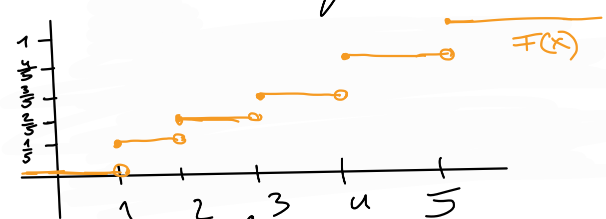
Sei $\mathbb{P}$ ein Maß oder Verteilung $\mathcal{U}([0,1])$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, F Vtfkt. einer diskreten ZV die nur endlich viele Werte annimmt &

$$F^{-1}: [0,1] \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$
$$x \longmapsto \inf\{s \in \mathbb{R} \mid F(s) \geq x\} \quad (\inf \emptyset = -\infty)$$

Sei $F = \sum_{k=1}^{n} p_k \mathbb{1}_{[a_k,\infty)}$ die Verteilungsfunktion mit Sprungstellen a_k und Sprunghöhen p_k.

a) Für $F: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ $x \longmapsto \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{5} \mathbb{1}_{[k,\infty)}(x)$: ges.: F^{-1}





- Sei $x=0$, dann ist $F^{-1}(x) = -\infty$
- Sei $0 < x \leq \frac{1}{5}$, dann ist

$$F^{-1}(x) = \inf\{s \in \mathbb{R} \mid F(s) \geq x\} = \inf\{s \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=1}^{5} \tfrac{1}{5} \mathbb{1}_{[k,\infty)}(s) \geq x\}$$
$$= 1$$

$\vdots$

- Sei $\frac{4}{5} < x \leq 1$, dann ist $F^{-1}(x) = 5$

b.) Beh.: F^{-1} ist $(\mathcal{B}([0,1]), \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-messbar

Bew.: Für eine allg. Verteilungsfunktion einer endlichen, diskreten Zufallsvariable (wie oben) kann man F^{-1} explizit hinschreiben.

$$F^{-1} = -\infty \cdot \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{(\sum_{i=1}^{k-1} p_i, \sum_{i=1}^{k} p_i]}, \quad \text{mit } \sum_{i=1}^{k-1} p_i = 0, \text{ falls } k-1 < 1$$

Diese ist als Summe von Indikatorfunktionen von Mengen aus $\mathcal{B}([0,1])$ wieder $(\mathcal{B}[0,1], \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-messbar.

<u>Achtung</u>: Die explizite Angabe von F^{-1} ist nicht die Inverse von F. Diese existiert nicht, da F keine Umkehrabbildung besitzt.

c) Bestimme die Vert.-fkt. des Bildmaßes: $\mathbb{P} \circ (F^{-1})^{-1}$

Lsg.: Sei $t \in \mathbb{R}$.

$$(\mathbb{P} \circ (F^{-1})^{-1})((-\infty, t]) = \mathbb{P}(F^{-1}(x) \leq t)$$

$$= \mathbb{P}(x \leq F(t))$$

Da für $s \in [0,1]$ $\mathbb{P}(x \leq s) = s$ gilt, weil $\mathbb{P}$ das Maß der uniformen Verteilung auf $[0,1]$ ist und $F(t) \in [0,1]$ per Definition, folgt

$$\mathbb{P}(x \leq F(t)) = F(t)$$

$\Rightarrow$ Verteilungsfunktion von $\mathbb{P} \circ (F^{-1})^{-1}$ ist F. $\square$

$\{(-\infty, t], \; t \in \mathbb{R}\}$