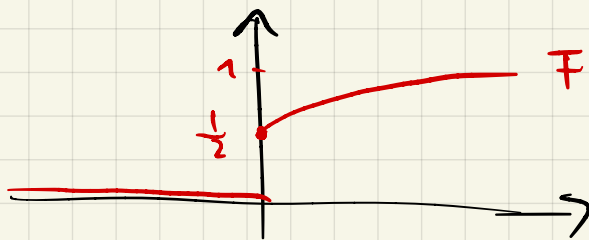


Ges: Richtige Zuordnungen

Lsg:

1 B	2 A	3 E	4 E	5 A
1 F	2 G	3 H	4 J	5 G
	2 I			5 I
	2 K			5 J
				(5D)

Anmerkung zu 5D: Im Allgemeinen falsch, da eine Verteilung auch eine Mischung aus einem stetigen und diskreten Maß sein kann. Betrachte z.B. die Verteilungsfunktion



Dann gilt $P_F(\{0\}) = \frac{1}{2}$, aber P_F ist nicht diskret.

Da dies in der VL aber nicht thematisiert wurde, haben wir 5D auch als richtige Zuordnung gelten lassen.

Sei $\mathcal{E} = \{E \subseteq \mathbb{R} \mid E \text{ endlich}\}$
 und $\mu: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty], E \mapsto 0$

a)

1) Bel: $\mathcal{E}$ ist Semiring

Bew: i) $\#\emptyset = 0 \Rightarrow \#\emptyset < \infty \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{E}$

ii) Seien $A, B \in \mathcal{E}$. Es gilt $A \cap B \subseteq A$
 $\Rightarrow \#A \cap B \leq \#A < \infty$

$\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{E}$

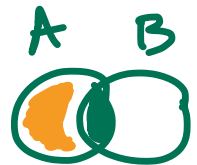
iii) Seien $A, B \in \mathcal{E}$. Es gilt $A \setminus B \subseteq A$

$\Rightarrow \#A \setminus B \leq \#A < \infty$

$\Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{E}$

redundanter
Schritt für Def.

$(\Rightarrow A \setminus B = \underbrace{(A \setminus B)}_{\in \mathcal{E}})$ $\square$



$\exists C_1, \dots, C_m \in \mathcal{E}$
 paarweise disjunkt

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^m C_i$$

$C := A \setminus B \in \mathcal{E}$

$A \setminus B = C$

2) Bel: $\sigma(\mathcal{E}) = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ abz. oder } A^c \text{ abz.}\} =: \mathcal{A}$

Bew: $\mathcal{A}$ ist nach Vorlesung eine σ -Algebra.

Es reicht also wieder (Ringschluss + Monotonie
 + Idempotenz) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ und $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ für
 $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$ zu zeigen.

1. " $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ ": Gilt, da jede endliche Menge abz. ist

2. " $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ ": Jede abz. Menge kann als abz.

Vereinigung endlicher Mengen dargestellt werden (bzw.)

Zusammen:

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{E}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$$

$$\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$$

$$\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \underbrace{\sigma(\mathcal{A})}_{\substack{\text{monotonie} \\ \sigma\text{-Algebra}}} = \mathcal{A} \stackrel{\text{idempotent}}{=} \mathcal{A} \stackrel{2.}{=} \sigma(\mathcal{E})$$

1. $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$

$A \in \mathcal{A}$

$\exists A_1, \dots$ endlich $\in \mathcal{E}$

$$A = \bigcup_{i=1}^m A_i$$

$A_i \in \mathcal{E}$

$\in \sigma(\mathcal{E})$

Abgeschlossenheit
 über Vereinigungen

b) Beh.: Es existieren unendliche viele Fortsetzungen von μ zu Maßen auf $\sigma(\mathcal{E})$

Bew.: Definiere für $\alpha \in \mathbb{R}^{\geq 0}$

$$\nu_\alpha: \sigma(\mathcal{E}) \rightarrow [0, \infty], E \mapsto \nu_\alpha(E) := \begin{cases} 0, & E \text{ abz.} \\ \alpha, & E^c \text{ abz.} \end{cases}$$

Dann gilt $\mu(E) = 0 = \nu_\alpha(E) \forall E \in \mathcal{E} \forall \alpha \in \mathbb{R}^{\geq 0}$.

Es bleibt zu zeigen, dass $(\nu_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}^{\geq 0}}$ eine Familie von Maßen ist.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ bel.

- $\nu_\alpha \geq 0$ per Definition
- $\nu_\alpha(\emptyset) = 0$ da $\emptyset$ höchstens abz.
- Seien $E_1, E_2, \dots \in \sigma(\mathcal{E})$ disjunkte Mengen

i) Fall 1: $E_1, E_2, \dots$ sind alles abzählbare Mengen.

Dann ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ wieder abz. Also gilt

$$\nu_\alpha\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = 0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_\alpha(E_n)$$

ii) Fall 2: Min. ein E_n ist überabzählbar.

$$\nu_\alpha\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \alpha \neq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_\alpha(E_n)$$

Überlegung: Seien E_1 und E_2 aus $\sigma(\mathcal{E})$, so, dass E_1^c und E_2^c abzählbar sind. Dann gilt $E_1 \cap E_2 = (E_1^c \cup E_2^c)^c = \mathbb{R} \setminus (E_1^c \cup E_2^c)$. Weil E_1^c und E_2^c abzählbar sind, gilt $E_1 \cap E_2 = \mathbb{R} \setminus (E_1^c \cup E_2^c) \neq \emptyset$.

$\Rightarrow$ Eine disjunkte Folge von Mengen in $\sigma(\mathcal{E})$ kann also höchstens eine Menge enthalten deren Komplement abz. ist.

+ viele überabzählbare Mengen $\in \mathbb{N}$

$\infty = 1!$

Sei E_i die Menge in Fall 2, so dass E_i^c abz... Dann gilt
 $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n)^c \stackrel{\text{de Morgan}}{=} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n^c \subseteq E_i^c$. Also ist $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n)^c$ abz. 

Also gilt $\nu_\alpha(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \alpha = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_\alpha(E_n)$, da nur der
 Summand $\nu_\alpha(E_i) = \alpha$ und $\nu(E_j) = 0 \ \forall i \neq j$ gilt.

Also gilt $\nu_\alpha(E) = \mu(E) \ \forall E \in \mathcal{E}$ und ν_α ist
 eine Fortsetzung auf $\sigma(\mathcal{E})$. Da $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$ bel. war, gibt
 es unendlich viele Fortsetzungen von μ auf $\sigma(\mathcal{E})$.

Die Fortsetzungen stellen keinen Widerspruch
 zum Satz im Skript dar, da gefordert wird,
 dass μ σ -endlich ist auf $\mathcal{E}$. Es existiert
 keine Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ endlicher Mengen, so dass
 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \mathbb{R}$ 

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \mathbb{R} \quad \text{überabzählbar}$$

gilt.

Ges: Verteilungsfunktionen für

$$P_1 := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$P_2 := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k, \quad p \in (0,1), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$P_3 := p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \delta_n$$

Lsg: Es gilt allgemein $F_p(t) := P((-\infty, t])$ für $t \in \mathbb{R}$

$$\delta_k: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0,1], \quad A \mapsto \delta_k(A) = \begin{cases} 1, & k \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$1_A: \mathbb{R} \rightarrow [0,1], \quad x \mapsto 1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

P_1 : Sei $t \in \mathbb{R}$.

$$P_1((-\infty, t]) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_k((-\infty, t]) \quad \delta_k((-\infty, t]) = \begin{cases} 1, & k \leq t \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} 1_{(-\infty, t]}(k) \quad = 1_{(-\infty, t]}(k)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} 1_{[k, \infty)}(t) \quad = 1_{[k, \infty)}(t)$$

$$\text{Also } F_{P_1}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} 1_{[k, \infty)}(t)$$

P_2 : Sei $t \in \mathbb{R}$.

$$P_2((-\infty, t]) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k((-\infty, t])$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} 1_{(-\infty, t]}(k)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} 1_{[k, \infty)}(t) = F_{P_2}(t)$$

$\mathbb{P}_3$: Sei $t \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{P}_3((-\infty, t]) = p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \delta_k((-\infty, t])$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} 1_{(-\infty, t]}(k)$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} 1_{[k, \infty)}(t) = \overline{F}_{\mathbb{P}_3}(t)$$

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beliebige Folge reeller Zahlen, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von nichtnegativen reellen Zahlen, s.d.

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$$

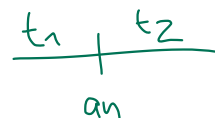
erfüllt und die Fkt Folge

als $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \mathbb{1}_{[a_n, \infty)}(t)$



a) Beh: F ist eine Verteilungsfunktion

(i) Offensichtlich gilt $F \geq 0$ und da $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ ist F durch 1 beschränkt. Also $0 \leq F \leq 1$



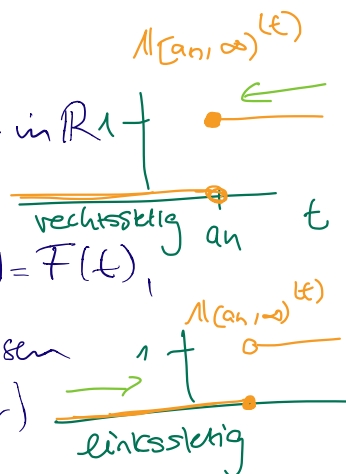
(ii) Seien $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ mit $t_1 \leq t_2$. Dann gilt

$$\mathbb{1}_{[a_n, \infty)}(t_1) \leq \mathbb{1}_{[a_n, \infty)}(t_2) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad F(t_1) \leq F(t_2)$$

(iii) Sei $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}^1$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t$. Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \mathbb{1}_{[a_n, \infty)}(t_k) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n \mathbb{1}_{[a_n, \infty)}(t) = F(t)$$

da die Intervalle der Indikatoren links abgeschlossen sind und daher rechtssteigend sind (Fallunterscheidung)



(iv) Es gilt einerseits $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbb{1}_{[a_n, \infty)}(t) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{[a_n, \infty)}(t) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Da $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n = 1$ folgt $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$

b) Beh: P mit $P((-\infty, t]) = \sum p_n \delta_{a_n}((-\infty, t]) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ ist das F zugehörige Maß P_F .

Bew: Sei $P: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$, $B \mapsto P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \delta_{a_n}(B)$

gegeben. P ist als Mischung von Maßen ein Maß und es gilt

$$2) \mathbb{P}(\mathbb{R}) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \underbrace{\delta_n(\mathbb{R})}_{=1} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1, \text{ also}$$

ist $\mathbb{P}$ ein W-Maß.

$$\begin{aligned} a_n \in (-\infty, t] \\ \Leftrightarrow t \geq a_n \\ \Leftrightarrow t \in [a_n, \infty) \end{aligned}$$

Sei nun $F^*: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], x \mapsto \mathbb{P}((-\infty, x])$ die Verteilungsfunktion von $\mathbb{P}$. Dann gilt

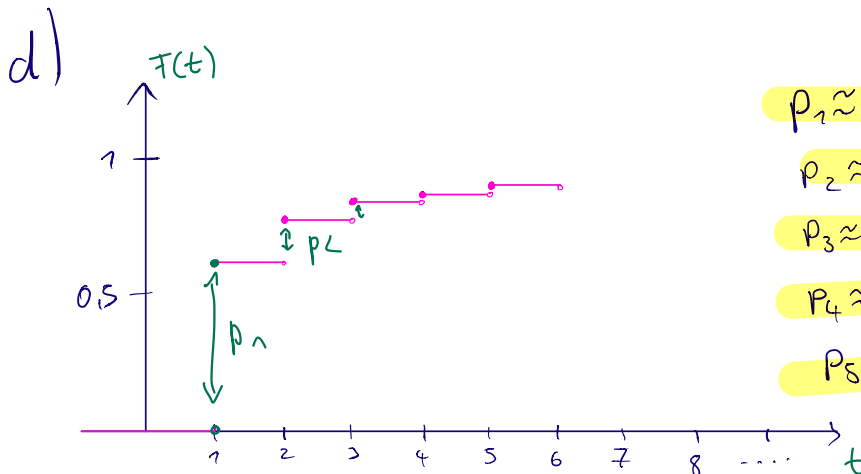
$$\begin{aligned} F^*(t) &= \mathbb{P}((-\infty, t]) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \delta_{a_n}((-\infty, t]) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mathbb{1}_{[a_n, \infty)}(t) \\ &= F(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{P}$ ist das zu F zugehörige Maß.

$$\begin{aligned} c) \bullet \mathbb{P}((a, b]) &= \mathbb{P}((-\infty, b]) - \mathbb{P}((-\infty, a]) \quad \begin{array}{l} \text{Add. von} \\ \text{Maßen} \end{array} \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \mathbb{P}([a, b]) &= \mathbb{P}((-\infty, b]) - \mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, a - \frac{1}{n}]) \quad (-\infty, b] \setminus (-\infty, a) \\ &\stackrel{\text{Stetigkeit}}{=} F(b) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}((-\infty, a - \frac{1}{n}]) = F(b) - \lim_{n \rightarrow \infty} F(a - \frac{1}{n}) \quad (*) \\ &= F(b) - \underline{F(a)}, \quad F(a_-) := \lim_{t \uparrow a} F(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{P}((a, b]) \neq \mathbb{P}([a, b])$, falls $F(a_-) \neq F(a)$,
also falls $a \in \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$



$$p_1 \approx 0,61$$

$$p_2 \approx 0,152$$

$$p_3 \approx 0,0675$$

$$p_4 \approx 0,038$$

$$p_5 \approx 0,024$$

Sei $\mathcal{S} := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ und

$$\lambda : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$$

$$[a, b] \mapsto \lambda([a, b]) = b - a$$

Ges: Fortsetzung von λ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Lsg: Nach VL ist $\mathcal{S}$ ein ¹⁾Semiring und es gilt

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{S})$. ²⁾Mit dem Fortsetzungssatz ³⁾bleibt zu zeigen, dass $\lambda(\emptyset) = 0$ und λ $\mathbb{R}$ -⁴⁾additiv.

i) Für $a \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda(\emptyset) = \lambda([a, a]) = a - a = 0$

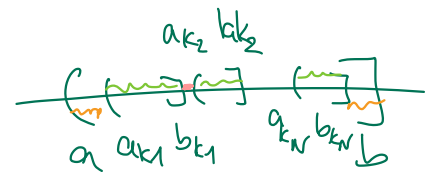
ii) Sei $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von disjunkten Intervallen mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \in \mathcal{S}$

Eig S

$$\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = [a, b]$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^N [a_n, b_n] \subseteq [a, b] \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a \leq a_n \text{ und } b_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



Wir sortieren die a_n, b_n so um, dass

$$a \leq a_{k_1} \leq b_{k_1} \leq a_{k_2} \leq \dots \leq a_{k_{N-1}} \leq a_{k_N} \leq b_{k_N} \leq b$$

" $\leq$ ": Damit gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda([a_n, b_n]) = \sum_{n=1}^{N-1} \lambda([a_n, b_n])$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \lambda([a_n, b_n]) &= \sum_{n=1}^N (b_{k_n} - a_{k_n}) \leq (a_{k_1} - a) + \sum_{n=1}^{N-1} ((b_{k_n} - a_{k_n}) + (a_{k_{n+1}} - b_{k_n})) \\ &\quad + (b_{k_N} - a_{k_N}) + (b - b_{k_N}) \\ &= (a_{k_1} - a) + \sum_{n=1}^{N-1} (a_{k_{n+1}} - a_{k_n}) + (b_{k_N} - a_{k_N}) \\ &\quad + (b - b_{k_N}) \\ &= a_{k_N} - a + a_{k_N} - a_{k_1} + b_{k_N} - a_{k_N} + b - b_{k_N} \\ &= b - a = \lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]\right) \\ &\quad \forall N \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\cancel{a_{k_2} - a_{k_1}} + \cancel{a_{k_3} - a_{k_2}} + \cancel{a_{k_4} - a_{k_3}} + \dots + \cancel{b_{k_N} - b_{k_{N-1}}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \leq b - a = \lambda \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \right)$$

" $\geq$ ": Sei $\varepsilon > 0$ und $\tilde{b}_n > b_n$, sodass $\tilde{b}_n - b_n < \varepsilon 2^{-n}$ gilt. $\forall n \in \mathbb{N}$
Dann gilt

$$[a + \varepsilon, b] \subseteq (a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, \tilde{b}_n)$$

$\Rightarrow$ Die Intervalle $(a_n, \tilde{b}_n)$ bilden eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[a + \varepsilon, b]$

Mit Heine-Borel folgt $\exists k \in \mathbb{N}, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$:

$$[a + \varepsilon, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^k (a_{n_i}, \tilde{b}_{n_i}) \quad (*)$$

Wir können wieder annehmen, dass man b_n und a_n sortieren kann. Damit die Indizes nicht zu verwirrend werden, nehmen wir o. B. d. A an, dass sie sortiert sind.

$$\Rightarrow b - (a + \varepsilon)$$

$$\stackrel{\text{monotonie}}{\leq} \sum_{i=1}^k (\tilde{b}_{n_i} - a_{n_i})$$

$$\stackrel{\text{geometrische Reihe}}{\leq} \sum_{i=1}^k (\tilde{b}_{n_i} - a_{n_i} + \varepsilon 2^{-n_i})$$

da $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lambda((a, b]) - \varepsilon \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda((a_n, b_n]) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lambda((a, b]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda((a_n, b_n]), \text{ da } \varepsilon \text{ bel.}$$

$$\Rightarrow \lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda((a_n, b_n])$$

$\Rightarrow \lambda$ ist σ -additiv

Carathéodory

$\Rightarrow$ Es existiert eine Fortsetzung von λ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Bleibt noch zu zeigen, dass λ ein unendliches Maß ist, also $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$ gilt.

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda\left(\underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{(-n, n]}_{\in \mathcal{S}}}_{\in \mathcal{O}(\mathcal{S})}\right) \stackrel{\text{Stetig.}}{\stackrel{\text{Monotonie}}{=}} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda((-n, n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n = \infty \quad \square$$