

Aufgabe 2

a) Vorr: $\mathcal{A}$ σ -Alg über Ω und $A \in \mathcal{A}$.

Beh: $\mathcal{A}_A := \{B \cap A \mid B \in \mathcal{A}\}$ ist σ -Alg über A

Bew: (i) $A \in \mathcal{A}_A$, da $\Omega \cap A = A$ und $\Omega \in \mathcal{A}$.

(ii) Sei $B \cap A \in \mathcal{A}_A$.

$$A \setminus (B \cap A) \stackrel{\text{Def}}{=} A \cap (B \cap A)^c$$

$$\stackrel{\text{De Morgan}}{=} A \cap (A^c \cup B^c)$$

$$= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)$$

$$= B^c \cap A$$

$$(B \cap A)^c$$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

Weil $B \in \mathcal{A}$ ist $B^c \in \mathcal{A}$. Also ist $B^c \cap A \in \mathcal{A}_A$.

(iii) Seien $C_1, C_2, \dots \in \mathcal{A}_A$. Also existieren

$B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}$ mit $B_1 \cap A = C_1, B_2 \cap A = C_2, \dots$

Es gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \stackrel{\text{Def}}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k \cap A)$$

$$\stackrel{\text{Ana}}{=} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right) \cap A \in \mathcal{A}_A$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\in \mathcal{A}}$

da $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}$.

b) Vorr: $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2, \mathcal{A}_2 \sigma\text{-Alg. über } \Omega_2.$

Beh: $\mathcal{A}_1 := f^{-1}(\mathcal{A}_2) = \{f^{-1}(A_2) \mid A_2 \in \mathcal{A}_2\}$
ist $\sigma\text{-Alg. über } \Omega_1.$

Bew: (i) $\Omega_1 \in \mathcal{A}_1$, da $f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1$ und $\Omega_2 \in \mathcal{A}_2$

(ii) Sei $B := f^{-1}(A)$, $A \in \mathcal{A}_2$. Dann ist

$$B^c = (f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c) \in \mathcal{A}_1$$

weil $A^c \in \mathcal{A}_2$.

(iii) Seien $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}_1$ und $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}_2$

mit $B_1 = f^{-1}(A_1), B_2 = f^{-1}(A_2), \dots$. Dann gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \stackrel{\text{Def}}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(A_k) \stackrel{\text{Eig. Urbild}}{=} f^{-1}\left(\underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}_{\in \mathcal{A}_2}\right) \in \mathcal{A}_1,$$

da $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}_2$.

c) Vorr: $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2 \sigma\text{-Alg über } \Omega_1 \text{ und } \Omega_2$

Beh: $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ im Allg. keine $\sigma\text{-Alg. über } \Omega_1 \times \Omega_2$

Bew: $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ sind $\sigma\text{-Algebren}$

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$$

Sei $B := \{(a, a)\}$.

Es gilt $\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ und $B \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

Allerdings ist $(\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus B \notin \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$

Damit ist $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ keine $\sigma\text{-Alg.}$

d) Vorr: $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, μ endl. Maß und $A_1, A_2, B \in \mathcal{A}$

Beh: Für $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu(B \setminus (A_1 \cup A_2)) = \mu(B) - \mu(A_1) - \mu(A_2) + \mu(A_1 \cap A_2)$$

Bew: $\mu(B \setminus (A_1 \cup A_2)) = \mu(B) - \mu((A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_1 \cap A_2))$

σ -Add. $= \mu(B) - \mu(A_1 \setminus A_2) - \mu(A_2 \setminus A_1) - \mu(A_1 \cap A_2)$

± 0 $= \mu(B) - \mu(A_1 \setminus A_2) - \mu(A_2 \setminus A_1) - \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) - \mu(A_1 \cap A_2)$

$$= \mu(B) - (\mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1)) - (\mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \cap A_2)) + \mu(A_1 \cap A_2)$$

$$= \mu(B) - \mu((A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)) - \mu((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2)) + \mu(A_1 \cap A_2)$$

σ -Add. $= \mu(B) - \mu(A_1) - \mu(A_2) + \mu(A_1 \cap A_2)$

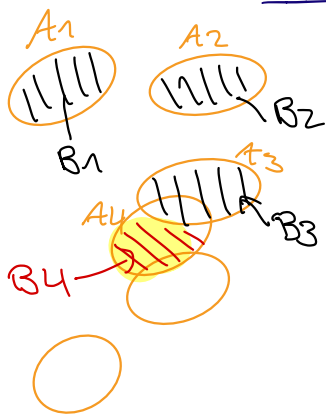


e) Vorr: $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ bel.

Beh: $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$

Sub- σ -Additivität

Bew: Definiere $B_1 := A_1$, $B_n := A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)$, $\forall n \geq 2$



Damit gilt $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ und $B_k \subseteq A_k \forall k \in \mathbb{N}$.

Daraus folgt $\mu(B_k) \leq \mu(A_k) \forall k \in \mathbb{N}$ und

zusammen

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \stackrel{\text{Def}}{=} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \stackrel{\sigma\text{-Additivität}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$



Sei $(M_0, \mathcal{X}(M_0))$ gegeben und

$$M_1 = C_1 \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \delta_n \quad \text{mit } C_1 \in \mathbb{R}, p \in (0,1)$$

$$\mu_2 := c_2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} J_k \quad \text{mit } c_2 \in \mathbb{R}, p \in (0,1), n \in \mathbb{N}$$

$$\mu_3 = \sum_{k=0}^n a_k \delta_k \quad \text{mit } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Ges: Bedingungen an Konstanten $c_1, c_2, a_1, \dots, a_n$, sodass die obigen

Abbildungen Maße (ω -Maße) sind.

log: Es müssen jeweils 3 Eigenschaften (0), (1), (2) überprüft werden

(o) $\mu: \mathcal{P}(M_0) \rightarrow [0, \infty]$

$$\begin{aligned} \delta_n(A) &= 1 & u \notin A: \\ &\Rightarrow u \in A_- & \delta_n(A) = 0 \end{aligned}$$

μ_N: Da das Dvax-Maß μ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Maß ist, ist diese

Eigenschaft erfüllt g.d.w. $c_1 \geq 0$, d.h.

$$\mu_n(A) \stackrel{\text{Def.}}{=} c_n \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \delta_n(A)}_{\geq 0} \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{M}_b \quad (\Rightarrow) \quad c_n \geq 0$$

M_2 : Mit gleicher Begründung gilt

$$\mu_r(A) > 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}(N_0) \quad (\Rightarrow) \quad C_2 \geq 0$$

μ_3 : Auch hier gilt $\mu_3(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}(N_0) \Rightarrow a_1, \dots, a_n \geq 0$

" $\subseteq$ " ist klar. Für " $\Rightarrow$ " betrachte $A_k = \{h\}$, $k = 0, \dots, n$

$$(1) \mu(\emptyset) = \theta$$

Da δ_k ein Maß ist gilt $\delta_k(\phi) = 0$ für alle $k \in M_0$.

Somit gilt diese Eigenschaft ohne Einschränkungen

an die Vorstenher.

(2) Falls $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P}(N_0)$ disjunkt sind, so gilt $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ (σ -Additivität)

μ_1 : Da δ_n ein Maß ist, gilt $\delta_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_n(A_k)$ und damit

$$\mu_1\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \stackrel{\text{Def.}}{=} c_1 \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \delta_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

$$\stackrel{\text{so.}}{=} c_1 \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_n(A_k)$$

$$\stackrel{\text{alle Summanden}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} c_1 \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \delta_n(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(A_k)$$

Dies gilt unabh. von der Wahl von c_1 .

μ_2 : Analog zu μ_1 .

$$\mu_3: \text{ Es gilt } \mu_3\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{k=0}^n a_k \delta_k\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

$$\stackrel{\text{so.}}{=} \sum_{k=0}^n a_k \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k(A_k)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k \delta_k(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_3(A_k)$$

(*) Die Summanden können vertauscht werden, falls $a_0, \dots, a_n \geq 0$. Dies

ist die gleiche Bedingung wie bei (2).

Zusammenfassend: μ_1, μ_2, μ_3 sind Maße, falls $c_1, c_2, a_0, \dots, a_n \geq 0$

Für W-Maße muss zusätzlich $\mu(N_0) = 1$ erfüllt sein.

$$\mu_1(N_0) \stackrel{\text{Def.}}{=} c_1 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1}}_{=1} \delta_n(N_0) = c_1 \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} = 1 \quad (\Rightarrow) \quad c_1 = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1}}$$

$$\text{Mit geo. Reihe: } \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

$$\mu_2(N_0) \stackrel{\text{Def.}}{=} c_2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \underbrace{\delta_k(N_0)}_{=1} = c_2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

$$(\Rightarrow) c_2 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

$$\text{mit } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \stackrel{\text{Binom.}}{=} (p + (1-p))^n = 1$$

$$\mu_3(M_0) \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{k=0}^n a_k \underbrace{S_k(M_0)}_{=1} = \sum_{k=0}^n a_k = 1 \quad (\Rightarrow) \sum_{k=0}^n a_k = 1.$$

Weiteres zur σ -Additivität

μ Mengenfunktion auf $(\mathcal{A}, A)$ mit $\mu(\emptyset) < \infty$ und μ ist additiv. Zusätzlich sei μ von unten stetig, d.h. falls $A_n \uparrow A \in \mathcal{A}$, so gilt $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$

Beh: μ ist σ -additiv

Bew: Wir zeigen zuerst, dass μ auch endlich additiv ist durch vollständige Induktion beginnend bei $n=2$.

Seien also A_1 und A_2 disjunkt, dann gilt

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) \text{ per VSS.}$$

Nun gelte die Beh. für ein festes, beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Für den Induktionsschritt seien $A_1, \dots, A_{n+1}$ paarweise disjunkt.

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k \cup A_{n+1}\right)$$

$$\stackrel{\text{VSS}}{=} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + \mu(A_{n+1})$$

$$\stackrel{IV}{=} \sum_{k=1}^n \mu(A_k) + \mu(A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k)$$

Nun zeigen wir σ -Additivität. Seien also $A_1, A_2, \dots$ paarweise disjunkt. Definiere $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Dann gilt $B_n \uparrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ und mit der endlichen Additivität + Stetigkeit folgt

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Vorr: Ziehe blind zwei von vier Kugeln

a) Ges: Modell des W-Raums

alle Tupel,
die wir
ziehen können

Lsg: $\Omega := \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}.$
3 in 3

Für σ -Alg $\mathcal{A}$ wähle $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega).$

Da alle Elementarereignisse $\omega \in \Omega$ gleichwahrscheinlich sind gilt

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{6} \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Mit σ -Additivität folgt dann für alle $A \in \mathcal{A}$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{6}.$$

b) (i) $A_1 \hat{=}$ Die Summe der Kugeln ist größer als 5

$A_1 = \{\{2,4\}, \{3,4\}\}$ und mit a)

$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) $A_2 \hat{=}$ Das Produkt der Kugeln ist ungerade
 $A_2 = \{\{1, 3\}\}$ und mit a)

$$P(A_2) = \frac{|A_2|}{6} = \frac{1}{6}$$

(iii) $A_3 \hat{=}$ Das Produkt der Kugeln ist gerade

$A_3 = A_2^c$, weil P endl. und mit (ii) gilt

$$P(A_3) = P(\Omega \setminus A_2) = \underline{P(\Omega)} - P(A_2) = \underline{1} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

(iv) $A_4 \hat{=}$ Die Kugel Nummer 3 oder Nummer 4 wird gezogen.

$A_4 = \{\{1, 4\}, \{2, 4\}, \underline{\{3, 4\}}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ und mit a)

$$P(A_4) = \frac{|A_4|}{6} = \frac{5}{6}$$