$U_1, U_2, \dots \overset{uiv}{\sim} \mathcal{U}[0,1]$

$X_n = \min(U_1, \dots, U_n)$

a) <u>Beh:</u> $X_n \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty.$

<u>Bew:</u> Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und o.B.d.A. $\varepsilon \leq 1$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) \\
&\overset{X_n = \min(U_1, \dots, U_n)}{=} \mathbb{P}(U_1 > \varepsilon, \dots, U_n > \varepsilon) \\
&\overset{uiv}{=} [\mathbb{P}(U_1 > \varepsilon)]^n \\
&= [1 - \mathbb{P}(U_1 \leq \varepsilon)]^n \\
&\overset{U_1 \sim \mathcal{U}[0,1]}{=} (1-\varepsilon)^n \longrightarrow 0, \quad n \to \infty, \text{ da } \varepsilon \in [0,1]
\end{aligned}$$

b) <u>Ges:</u> Verteilungsfunktion von X_n

<u>Lsg:</u> Sei $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
F_{X_n}(t) = \mathbb{P}(X_n \leq t) &= 1 - \mathbb{P}(X_n > t) \\
&= 1 - \mathbb{P}(U_1 > t, \dots, U_n > t) \\
&\overset{uiv}{=} 1 - \underbrace{[\mathbb{P}(U_1 > t)]}_{= \begin{cases} 0, & t > 1 \\ 1-t, & t \in [0,1] \\ 1, & t < 0 \end{cases}}{}^n = \left(1 - (1-t)^n\right) \mathbb{1}_{[0,1]}(t) + \mathbb{1}_{(1,\infty)}(t)
\end{aligned}$$

c) <u>Beh:</u> $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} 0, \quad n \to \infty$

<u>Bew:</u> Die Dichte von X_n ist gegeben durch

$$f_n(x) = n(1-x)^{n-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

$\rightsquigarrow$ durch Ableiten der Verteilungsfkt; Eigenschaften einer Dichte checken!

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbb{E}[|X_n - 0|] = \mathbb{E}[X_n] &\overset{\text{Trafo}}{=} \int_{\mathbb{R}} x \, d\mathbb{P}_{X_n}(x) \\
&\overset{\substack{\text{wohldefiniert,} \\ \text{da stetig} \\ \text{und beschränkt}}}{=} \int_0^1 x \, n(1-x)^{n-1} \, dx \\
&\overset{\substack{\text{part.} \\ \text{Int.}}}{=} \left[-x(1-x)^n\right]_0^1 + \int_0^1 (1-x)^n \, dx \\
&\overset{\substack{\text{Haupt-} \\ \text{satz}}}{=} 0 + \left[-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Also gilt $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} 0, \quad n \to \infty.$ $\square$

d) <u>Beh:</u> $X_n \xrightarrow{f.s.} 0 \quad , \quad n \to \infty$

<u>Bew:</u> Mit Borel-Cantelli Lemma gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \implies X_n \xrightarrow{f.s.} 0 \, , \quad n \to \infty$$

Es gilt für $\varepsilon \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) &\overset{X_n \geq 0 \ \mathbb{P}\text{-f.s.}}{=} \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) \\
&\overset{\text{Def.}}{=} \mathbb{P}(\min(U_1, \ldots, U_n) > \varepsilon) \\
&= \mathbb{P}(U_1 > \varepsilon, \ldots, U_n > \varepsilon) \\
&\overset{\substack{\text{unabh.} \\ + \text{ identisch} \\ \text{verteilt}}}{=} \mathbb{P}(U_1 > \varepsilon)^n = (1-\varepsilon)^n
\end{aligned}$$

Also $$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon)^n \overset{\text{geo. Reihe}}{=} \frac{1}{1-(1-\varepsilon)} - 1$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} < \infty$$

$\implies X_n \xrightarrow{f.s.} 0 \quad , \quad n \to \infty .$

Geg: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von paarweise unkorrelierten ZV.

$\mathbb{E}[X_n^2] < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) \to 0, n\to\infty$

Beh: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathbb{E}[X_k]) \xrightarrow{P} 0, n\to\infty$

Bew: Da die X_n paarweise unkorreliert$^{(**)}$ sind und

(*) $\mathbb{E}[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathbb{E}[X_k])] = 0$ gilt, folgt:

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbb{E}[X_k])\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}\,\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbb{E}[X_k])\right)^2\right]$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{n^2}\,\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbb{E}[X_k])\right)$$

$$\overset{\text{Bienaymé}\,(**)}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k - \mathbb{E}[X_k])$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k) \longrightarrow 0, n\to\infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbb{E}[X_k]) \xrightarrow{\mathcal{L}^2} 0, n\to\infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbb{E}[X_k]) \xrightarrow{P} 0, n\to\infty$$

Geg: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen

a) Beh: $\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$

Bew: Sei $\omega \in \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \omega \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \omega \in A_k \;\forall k \geq n_0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \; \exists k \geq n : \omega \in A_k$

$\Rightarrow \omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \limsup_{n\to\infty} A_n$

b) Beh: $(\liminf_{n\to\infty} A_n)^c = \limsup_{n\to\infty} A_n^c$

Bew: Mit De Morgan gilt

$$(\liminf_{n\to\infty} A_n)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c$$
$$= \limsup_{n\to\infty} A_n^c$$

c) Beh: $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = \mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$

Bew: Es gilt

$$\mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n}(\omega) = 0 \iff \omega \notin \liminf_{n\to\infty} A_n$$
$$\iff \nexists n_0 \in \mathbb{N} : \omega \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k$$
$$\iff \forall n \in \mathbb{N} : \exists k \geq n : \omega \notin A_k$$
$$\iff \forall n \in \mathbb{N} : \exists k \geq n : \mathbb{1}_{A_k}(\omega) = 0$$
$$\iff \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 0$$

Also gilt auch

$$\mathbb{1}_{\liminf\limits_{n\to\infty} A_n}(\omega)=1 \iff \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega)=1$$

$$\Rightarrow \mathbb{1}_{\liminf\limits_{n\to\infty} A_n} = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega)$$

d)

Beh: $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = \mathbb{1}_{\limsup\limits_{n\to\infty} A_n}(\omega) \quad \forall \omega\in\Omega$

Bew:

$$\mathbb{1}_{\limsup\limits_{n\to\infty} A_n}(\omega) = 1 \iff \omega\in \limsup_{n\to\infty} A_n$$

$$\iff \forall n\in\mathbb{N}\ \exists k\geq n : \omega\in A_k$$

$$\iff \forall n\in\mathbb{N}\ \exists k\geq n : \mathbb{1}_{A_k}(\omega)=1$$

$$\iff \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega)=1$$

Also gilt auch $\mathbb{1}_{\limsup\limits_{n\to\infty} A_n}(\omega)=0 \iff \limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega)=0$

Frage: Was läuft beim Beweis des starken GGZ schief, wenn nur endliche zweite oder dritte Momente vorausgesetzt werden?

Falls nur $\mathbb{E}[|X_1^3|] < \infty$ gilt, bekommen wir bei der zweiten Umformung im Beweis ein Problem, denn

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^3\right] \neq \mathbb{E}\left[\sum_{k_1,k_2,k_3=1}^{n} X_{k_1}X_{k_2}X_{k_3}\right] \text{ (Betrag bleibt bestehen).}$$

Auch die folgende Abschätzung durch Δ-Ungleichung

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^3\right] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{k_1,k_2,k_3=1}^{n} |X_{k_1}X_{k_2}X_{k_3}|\right]$$

würde nicht zum Ziel führen, da $\mathbb{E}[|X_1|] \neq 0$ und somit fallen diese Terme nicht weg.

Falls nur $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ gilt, so erhalten durch die gleichen Rechenschritte nur eine obere Schranke von $\frac{c}{n}$ und dies reicht nicht aus um auf die Konvergenz der Reihe zu schließen ($\rightsquigarrow$ harmonische Reihe). Also sind die Voraussetzungen von Borel-Cantelli nicht erfüllt.