$X \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$
$Y \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$

a) Beh: $X+Y \sim \Gamma(\alpha_1+\alpha_2, \beta)$

Bew: Da die Abbildung $x \mapsto e^{tx}$ stetig und nichtnegativ ist für ein festes $t \in \mathbb{R}$ und X eine messbare Abbildung ist, ist auch die Verknüpfung $\omega \mapsto e^{tX(\omega)}$ messbar und nichtnegativ. Die nachfolgenden Integrale / Erwartungswerte sind also wohldefiniert.

Nach Übungsblatt 9 gilt für $X \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$ und $t < \beta$

$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha_1}$ und analog für $Y \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$

$M_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha_2}$.

Da X, Y unabhängig und $M_X(t), M_Y(t) < \infty$ für $t < \beta$ gilt für $t \in (-\beta, \beta)$

$$M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{(X+Y)t}] = \mathbb{E}[e^{tX} e^{tY}]$$
$$\overset{\text{unabh.}}{=} \mathbb{E}[e^{tX}]\, \mathbb{E}[e^{tY}] = M_X(t) M_Y(t)$$
$$= \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha_1+\alpha_2} = M_Z(t) \quad \text{für } Z \sim \Gamma(\alpha_1+\alpha_2, \beta)$$

Also stimmen die momenterzeugenden Funktionen in einer Umgebung der 0 überein und nach VL folgt

$X+Y \sim Z$, d.h. $X+Y \sim \Gamma(\alpha_1+\alpha_2, \beta)$.

$\square$

b) Bch: $X+Y \sim Bin(n+m, p)$ $\quad X \sim Bin(n,p)$, $Y \sim Bin(m,p)$

Bew: Da X, Y unabhängige, diskrete Zufallsvariablen sind, gilt mit der diskreten Faltungsformel für $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{l=0}^{m} \mathbb{P}(X=k-l)\, \mathbb{P}(Y=l)$$

$$\overset{\substack{\mathbb{P}(X=k-l)=0 \\ \text{für } l>k}}{=} \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(X=k-l)\, \mathbb{P}(Y=l)$$

$$\overset{\substack{X\sim Bin(n,p) \\ Y\sim Bin(m,p)}}{=} \sum_{l=0}^{k} \binom{n}{k-l} p^{k-l} (1-p)^{n-k+l} \binom{m}{l} p^{l} (1-p)^{m-l}$$

$$= p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{l=0}^{k} \binom{n}{k-l}\binom{m}{l}$$

$$\overset{\text{Hinweis}}{=} \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}$$

Also gilt $\mathbb{P}(X+Y=k) = \mathbb{P}(Z=k)$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$ für $Z \sim Bin(n+m, p)$

$\Rightarrow$ $X+Y \sim Bin(n+m, p)$

$\square$

<u>Bem:</u> Exponentialverteilung ist gedächtnislos,

d.h. für $X \sim Exp(\lambda)$ gilt

$$\mathbb{P}(X \geq s+t \mid X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t) \quad \forall t,s \geq 0$$

<u>Bew:</u> Sei $X \sim Exp(\lambda)$

$$\mathbb{P}(X \geq s+t \mid X \geq s) \overset{\text{Def.}}{=} \frac{\mathbb{P}(X \geq s+t, X \geq s)}{\mathbb{P}(X \geq s)}$$

$$\overset{\{X \geq s+t\} \subseteq \{X \geq s\}}{=} \frac{\mathbb{P}(X \geq s+t)}{\mathbb{P}(X \geq s)}$$

$$\overset{X \text{ stetig}}{=} \frac{1 - F_X(s+t)}{1 - F_X(s)}$$

$$\overset{X \sim Exp(\lambda)}{=} \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X \geq t)$$

$\Rightarrow$ X ist gedächtnislos

a) <u>Beh:</u> Paarweise Unabhängigkeit von Mengen impliziert nicht Unabhängigkeit.

<u>Bew:</u> Sei $\Omega = \{112, 121, 211, 222\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}: \mathcal{A} \to [0,1]$, $A \mapsto \frac{|A|}{4}$

Dann ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum

Seien $A_1 := \{112, 121\}$, $A_2 := \{211, 112\}$, $A_3 = \{211, 121\}$.

Dann gilt $A_i \in \mathcal{A}$ und $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{2}$ $\forall i \in \{1,2,3\}$ und

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(\{112\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(\{121\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3)$$

$$\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(\{211\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$$

$\Rightarrow$ A_1, A_2, A_3 sind paarweise unabhängig

Es gilt aber

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$$

$\Rightarrow$ A_1, A_2, A_3 sind nicht unabhängig

<u>Beh:</u> X, Y, Z paarweise unabhängige ZV $\not\Rightarrow$ X, Y, Z unabhängig

<u>Bew:</u> Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ wie in a) und seien

$$X(\omega) = \mathbb{1}_{A_1}(\omega) \quad , \quad Y(\omega) = \mathbb{1}_{A_2}(\omega) \quad , \quad Z(\omega) = \mathbb{1}_{A_3}(\omega)$$

Da $A_i \in \mathcal{A}$ für $i = 1, 2, 3$ sind X, Y, Z ZV

mit $\sigma(X) = \sigma(A_1)$, $\sigma(Y) = \sigma(A_2)$ und $\sigma(Z) = \sigma(A_3)$

Da die Unabh. von ZV über die Unabhängigkeit der erzeugten σ-Algebren definiert ist und es reicht, diese auf einem $\cap$-stabilen Erzeuger zu testen, sind X, Y, Z nach a) paarweise unabhängig.

Allerdings ist

$$\begin{aligned} F_{(X,Y,Z)}(0,0,0) &= \mathbb{P}(X \leq 0, Y \leq 0, Z \leq 0) \\ &= \mathbb{P}(X = 0, Y = 0, Z = 0) \\ &= \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) \\ &= \mathbb{P}(\{2222\}) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Aber } F_X(0) F_Y(0) F_Z(0) &= \mathbb{P}(A_1^c)\, \mathbb{P}(A_2^c)\, \mathbb{P}(A_3^c) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ X, Y, Z sind nicht unabhängig.

c) Beh: Unkorreliertheit von ZV $\not\Rightarrow$ Unabhängigkeit

Bew: Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}$ ein W-Maß mit

$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{2}{5}$ für $i = 1,2$ & $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{10}$ für $i = 3,4$

Definiere die ZV $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ als

$X(\omega_1) = 1$, $X(\omega_2) = -1$, $X(\omega_3) = 2$, $X(\omega_4) = -2$

$Y(\omega_1) = -1$, $Y(\omega_2) = 1$, $Y(\omega_3) = 2$, $Y(\omega_4) = -2$

Dann ist $X \cdot Y$ wieder eine ZV und es gilt

$(X \cdot Y)(\omega_1) = -1$, $(X \cdot Y)(\omega_2) = -1$, $(X \cdot Y)(\omega_3) = 4$,

$(X \cdot Y)(\omega_4) = 4$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}[XY] = (-1)\frac{2}{5} + (-1)\frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{1}{10} + 4 \frac{1}{10} = 0.$$

Mit der Verschiebungsformel für die Kovarianz gilt

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \\ &= \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\ &= 0 - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0, \end{aligned}$$

denn $\mathbb{E}[X] = \frac{2}{5}(1-1) + \frac{1}{10}(2-2) = 0$

und analog für Y.

Da $\mathbb{V}(X), \mathbb{V}(Y) < \infty$ folgt also auch $\rho(X,Y) = 0$.

X und Y sind aber nicht unabhängig (im Gegenteil: der Wert von X bestimmt den Wert von Y eindeutig und umgekehrt). So gilt z.B.

$$\mathbb{P}(X=1, Y=-1) = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{2}{5}$$
$$\neq \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=-1).$$

$\square$

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von ZV mit

$X_n = (-1)^n X \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) <u>Bel:</u> $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung gegen X

<u>Bew:</u> Sei $f \in C_b(\mathbb{R})$. Dann gilt für $n \in \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : 2k = n\}$

$\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f((-1)^n X)] = \mathbb{E}[f(X)]$ und

für $n \in \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : 2k+1 = n\}$

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(-X)]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(-x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$$

Subs: $y = -x$ ~~$y = x$~~

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-y)^2}{2}} \, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy$$

$$= \mathbb{E}[f(X)]$$

$$\int_{\mathbb{R}} \underbrace{|f(x)|}_{\leq M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\stackrel{\text{lin}}{\leq} M \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{=1} = M$$

$\mathbb{E}[|f(X)|]$ ex.

Die Integrale existieren, da $f \in C_b(\mathbb{R})$ und zusammen gilt

$\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)] \; \forall n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$ und da $f \in C_b(\mathbb{R})$ bel. war

konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen X.

b)

<u>Bel:</u> $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht stochastisch gegen X.

<u>Bew:</u> Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dann gilt für alle $n \in \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1\}$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|-2X| > \tfrac{1}{2})$$

$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

$$= \mathbb{P}(|X| > \tfrac{1}{4})$$

$$= \mathbb{P}_X\left((-\infty, -\tfrac{1}{4}] \,\dot\cup\, (\tfrac{1}{4}, \infty)\right)$$

$$= \mathbb{P}_X((-\infty, -\tfrac{1}{4}]) + \mathbb{P}_X((\tfrac{1}{4}, \infty))$$

$\mathbb{P}_X(B) = \int_B f(x) \, dx$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{>0} + \underbrace{\int_{\frac{1}{4}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{>0}$$

beide Terme sind jeweils strikt positive Konstanten die nicht von n abhängen.

$\Rightarrow \mathbb{P}(|X_n - X| > \frac{1}{2}) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht stochastisch gegen X.

c) Beh: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht fast sicher gegen X.

Bew: Sei $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > \frac{1}{4}\}$. Dann gilt, ähnlich wie in b), $\mathbb{P}(A) = c > 0$ und $X(\omega) \neq -X(\omega)\ \forall \omega \in A$.

$\Rightarrow X_n(\omega) \neq X(\omega)\ \forall \omega \in A,\ n \in \{n\in\mathbb{N} : \exists k\in\mathbb{N} : 2k+1 = n\}$

$\Rightarrow X_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} X(\omega)\ \forall \omega \in A$

$\Rightarrow (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht fast sicher gegen X, da $\mathbb{P}(A) > 0$ und $\{\omega\in\Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\} \supseteq A$ keine Nullmenge ist.

$$\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$$

$$\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}) = \underline{\underline{0}}$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X > \tfrac{1}{4}) = \mathbb{P}_X((\tfrac{1}{4}, \infty)) = \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} f(x)\,dx$$

$\alpha > 0$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von ZV mit $X_1 = 1$,

$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}$, $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^\alpha}$ $\forall\, n \geq 2$

a) Ges: Für welche $\alpha > 0$ konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch gegen 1?

Lsg: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(|X_n - 1| > \varepsilon) = \begin{cases} 0 & , n-1 \leq \varepsilon \\ \frac{1}{n^\alpha} & , n-1 > \varepsilon \end{cases} = \frac{1}{n^\alpha} \mathbb{1}_{(0,n-1)}(\varepsilon)$$

Also gilt:

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert stochastisch gegen 1

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(|X_n - 1| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^\alpha} \mathbb{1}_{(0,n-1)}(\varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha > 0.$$

b) Ges: Für welche $\alpha > 0$ konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im p-ten Mittel gegen 1? (Für $p \geq 1$)

Lsg: Sei $p \geq 1$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[|X_n - 1|^p] = |n-1|^p\, \mathbb{P}(X_n = n) + |1-1|^p\, \mathbb{P}(X_n = 1)$$
$$= \frac{(n-1)^p}{n^\alpha} \quad \forall\, n \geq 2$$

Also gilt:

$\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - 1|^p] = 0 \Leftrightarrow \alpha > p$, denn

„$\Leftarrow$": $\frac{(n-1)^p}{n^\alpha} \leq \frac{n^p}{n^\alpha} = n^{p-\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, da $\alpha > p$

„$\Rightarrow$": Angenommen $\alpha \leq p$, dann ist für $n \geq 2$

$$\frac{(n-1)^p}{n^\alpha} \geq \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^p}{n^\alpha} = \left(\frac{1}{2}\right)^p n^{p-\alpha}$$

und $\left(\frac{1}{2}\right)^p n^{p-\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, falls $\alpha < p$

und $\left(\frac{1}{2}\right)^p \neq 0$, falls $\alpha = p$.

c) <u>Ges:</u> Für welche $a>0$ konvergiert (X_n) in Verteilung gegen 1 ?

<u>Lsg:</u> Sei $a>0$ und $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt.

Dann gilt

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n^a}\right)}_{\substack{\to 1,\, n\to\infty \\ \text{da } a>0}} f(1) + \underbrace{\frac{1}{n^a} f(n)}_{\substack{\to 0,\, n\to\infty \\ \text{da } a>0 \text{ und} \\ f \text{ beschränkt}}}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} f(1) = \mathbb{E}[f(1)]$$

$$\Rightarrow X_n \xrightarrow{(d)} 1 \quad \text{für alle } a>0.$$