Vor: Zufallsvariable $X \geq 0$ auf W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Beh: $\mathbb{E}[X^r] = \int_0^\infty r t^{r-1} \, \mathbb{P}(X > t)\, dt \quad \forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Bew:

$\boxed{\mathbb{E}[g(X)] = \int_\Omega g(X(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega)}$

$$\mathbb{E}[X^r] = \mathbb{E}\Big[\int_0^{X^r} 1 \, dt\Big]$$

wohldefiniert, da $X \geq 0$

$$\overset{\text{Def.}}{=} \int_\Omega \Big(\int_0^\infty \mathbb{1}_{[0, X(\omega)^r)}(t) \, dt \Big) d\mathbb{P}(\omega)$$

$$\overset{\text{Fubini } (*)}{=} \int_0^\infty \Big(\int_\Omega \mathbb{1}_{[0, X(\omega)^r)}(t) \, d\mathbb{P}(\omega) \Big) dt$$

$0 \leq t < X(\omega)^r < \infty$

$0 \leq t^{\frac{1}{r}} < X(\omega) < \infty$

$$= \int_0^\infty \Big(\int_\Omega \mathbb{1}_{(t^{1/r}, \infty)}(X(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) \Big) dt$$

$$\overset{\text{Def } \mathbb{E}}{=} \int_0^\infty \Big(\mathbb{E}[\mathbb{1}_{(t^{1/r}, \infty)}(X)] \, dt$$

$\boxed{\mathbb{E}[\mathbb{1}_B(X)] = \mathbb{P}(X \in B)}$

$$= \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t^{1/r})\, dt$$

$\boxed{t = y^r \Rightarrow \frac{dt}{dy} = r \cdot y^{r-1} \quad \Leftrightarrow dt = r \cdot y^{r-1} dy}$

$$\overset{\text{Subs.}}{=} \int_0^\infty r \cdot t^{r-1} \, \mathbb{P}(X > t)\, dt$$

(*) Wir müssen noch die Vor für Fubini checken:

- $\mathbb{1}_{[0, X(\omega)^r)}(t) \geq 0$ offensichtlich
- $(t, \omega) \mapsto \mathbb{1}_{[0, X(\omega)^r)}(t) = \mathbb{1}_A(t, \omega)$ mit

$$A = \{(t, \omega) \mid t < X(\omega)^r\}.$$

Die Abbildung ist also messbar, falls $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}$.

$$A = \bigcup_{s \in \mathbb{Q}} \{(t, \omega) \mid t^{1/r} < s < X(\omega)\}$$

$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$

$$= \bigcup_{s \in \mathbb{Q}} \{(t,\omega) \mid t < s\} \cap \{(t,\omega) \mid s < X(\omega)\}$$

$$= \bigcup_{s \in \mathbb{Q}} \underbrace{\left([0,s] \times \Omega\right)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}} \cap \underbrace{\mathbb{R}_+ \times \{X > s\}}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}}$$

$\Longrightarrow A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}$

$\Longrightarrow$ Die Abbildung ist messbar und wir dürfen Fubini anwenden.

$\mathcal{E} = \{O \subseteq \mathbb{R}^d : O \text{ offen}\}$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\underbrace{\{B_1 \times \dots \times B_d : B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ \forall k \in \{1,\dots,d\}\}}_{=: \hat{\mathcal{E}}})$

a) Beh: $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

Bew: Wir zeigen ① $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\hat{\mathcal{E}}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

② $\hat{\mathcal{E}} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$

$\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \overset{\text{Mon.}}{\subseteq} \sigma(\sigma(\hat{\mathcal{E}})) \overset{\text{Idempotent}}{=} \underbrace{\sigma(\hat{\mathcal{E}})}_{=\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} \overset{\text{Mon.}}{\subseteq} \sigma(\mathcal{E})$ und somit gilt die Gleichheit.

① Sei $O \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge. Wir können O darstellen als

$$O \overset{O \text{ ist offen}}{=} \bigcup_{i \in I} (a_1^i, b_1^i) \times \dots \times (a_d^i, b_d^i)$$ für passende $a_k^i, b_k^i \in \mathbb{R}$ und I eine Indexmenge.

Da $\mathbb{Q}^d$ dicht in $\mathbb{R}^d$ liegt, reichen auch abzählbar viele Intervalle

$$O = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\underbrace{(a_1^n, b_1^n)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \times \dots \times (a_d^n, b_d^n)}_{\in \{B_1 \times \dots \times B_d : B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ \forall k \in \{1,\dots,d\}\}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$ da σ-Algebren $\cup$-stabil sind.

② Für $B_1, \dots, B_d \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt: $B_1 \times \dots \times B_d = \bigcap_{k=1}^{d} \mathbb{R} \times \dots \times B_k \times \dots \times \mathbb{R}$.

Da σ-Algebren abgeschlossen bzgl. Durchschnitten sind, reicht es oBdA

(*) $B_1 \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \in \sigma(\mathcal{E}) \quad \forall B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ zu zeigen.

Wir zeigen, dass das Mengensystem $\hat{\mathcal{E}} := \{E \subseteq \mathbb{R} \mid E \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \in \sigma(\mathcal{E})\}$ eine σ-Algebra ist (i), die alle offenen Mengen $\tilde{O} \subseteq \mathbb{R}$ enthält (ii).

Dann gilt

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{\tilde{O} \subseteq \mathbb{R} : \tilde{O} \text{ offen}\}) \overset{\text{Mon.}}{\subseteq} \sigma(\hat{\mathcal{E}}) \overset{\sigma\text{-Alg.}}{=} \hat{\mathcal{E}}.$$ Also ist (*) erfüllt.

(i) Überprüfe die Eigenschaften einer σ-Algebra:

(i) $\mathbb{R} \in \hat{\mathcal{E}}$, da $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^d \in \sigma(\mathcal{E})$

(ii) Sei $E \in \tilde{\mathcal{E}}$. Es gilt

$$E^c \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = (\underbrace{E \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{\in \sigma(\mathcal{E}), \text{ da } E \in \tilde{\mathcal{E}}})^c \in \sigma(\mathcal{E}),$$ da σ-Algebren abgeschlossen bzgl. Komplementbildung sind.

$\Rightarrow E^c \in \tilde{\mathcal{E}}$

(iii) Seien $E_1, E_2, \ldots \in \tilde{\mathcal{E}}$. Es gilt

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(E_n \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R})}_{\in \sigma(\mathcal{E}),\ \text{da } E_n \in \hat{\mathcal{E}}} \in \sigma(\mathcal{E}), \text{ da } \cup\text{-stabil}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \tilde{\mathcal{E}}$$

Somit ist $\hat{\mathcal{E}}$ eine σ-Algebra.

(ii) z.z. $\hat{\mathcal{E}}$ enthält $\{\bar{O} \subseteq \mathbb{R} : \bar{O} \text{ offen}\}$

Sei also $\bar{O} \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Menge. Dann ist auch die Menge $\bar{O} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Menge (in $\mathbb{R}^d$) und somit gilt $\bar{O} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \in \sigma(\mathcal{E})$, d.h. $\bar{O} \in \hat{\mathcal{E}}$ für alle $\bar{O}$ offen.

$\overset{(i)+(ii)}{\Longrightarrow} \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$

$\square$

b) Beh: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\underbrace{\{E_1 \times \ldots \times E_d \mid E_k \in \mathcal{E}\ \forall k \in \{1, \ldots, d\}\}}_{=: \mathcal{E}^d})$

Bew: „$\supseteq$":

Da $\mathcal{E}$ ein Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist gilt $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ \forall E \in \mathcal{E}$.
Daraus folgt $\sigma(\mathcal{E}^d) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

„$\subseteq$":

Mit der Def. von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ aus der Aufgabenstellung reicht es zu zeigen, dass
$\{B_1 \times \ldots \times B_d \mid B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ \forall k \in \{1, \ldots, d\}\} \subseteq \sigma(\mathcal{E}^d)$ gilt.

Sei nun $B_1 \times \dots \times B_d$, $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ \forall k \in \{1, \dots, d\}$ bel., dann gilt

$$B_1 \times \dots \times B_d = (B_1 \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times B_2 \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}) \cap \dots \cap (\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times B_{k-1} \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times B_k).$$

Da σ-Algebren abg. unter $\cap$-Bildung sind reicht es zu zeigen, dass für bel. $k \in \{1, \dots, d\}$, $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times B_k \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \in \sigma(\mathcal{E}^d)$$

gilt. Anders formuliert wollen wir

$$B_k \in \underbrace{\{E \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times E \times \mathbb{R} \dots \times \mathbb{R} \in \sigma(\mathcal{E}^d)\}}_{=: \hat{\mathcal{E}}} \text{ zeigen.}$$

Es reicht zu zeigen, dass $\hat{\mathcal{E}}$ eine σ-Algebra ist die $\mathcal{E}$ enthält, da dann $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\hat{\mathcal{E}}) = \hat{\mathcal{E}}$ folgt.

- $\mathbb{R} \in \hat{\mathcal{E}}$, da $\mathbb{R}^d \in \sigma(\mathcal{E}^d)$
- Sei $A \in \hat{\mathcal{E}}$, also $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times A \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \in \sigma(\mathcal{E}^d)$

  $\Rightarrow (\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times A \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R})^c = (\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times A^c \times \mathbb{R} \dots \times \mathbb{R}) \in \sigma(\mathcal{E}^d)$

  $\Rightarrow A^c \in \hat{\mathcal{E}}$
- Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\hat{\mathcal{E}}$, also $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times A_n \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \in \sigma(\mathcal{E}^d)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $(\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times A_n \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}) \in \sigma(\mathcal{E}^d)$, da $\sigma(\mathcal{E}^d)$ σ-Algebra

$\Rightarrow \hat{\mathcal{E}}$ ist σ-Algebra

Mit der Vorr. ($\exists (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$, mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \mathbb{R}$) folgt für $E \in \mathcal{E}$

$$(\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times E \times \dots \times \mathbb{R}) = \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{(E_n \times \dots \times E_n \times E \times \dots \times E_n)}_{\in \mathcal{E}^d}}_{\in \mathcal{E}^d}$$

$\Rightarrow \mathcal{E} \subseteq \hat{\mathcal{E}}$

$\square$

Vor: $f: \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ multivariate Dichtefunktion, d.h.

(i) f $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar

(ii) $f \geq 0$

(iii) $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = 1$

Beh: $F(t_1,\dots,t_d) = \int_{(-\infty,t_1]\times\dots\times(-\infty,t_d]} f(x)\,dx$ ist eine multivariate Verteilungsfunktion

$\boxed{F: \mathbb{R}^d \to [0,1]}$

Bew: a) Per Vorr. gilt $\forall t_1,\dots,t_d \in \mathbb{R}$:

$$0 \overset{(ii)}{\leq} \mathbb{1}_{(-\infty,t_1]\times\dots\times(-\infty,t_d]}(x)\, f(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

$$\Rightarrow 0 \overset{\text{Mon}}{\leq} \int_{(-\infty,t_1]\times\dots\times(-\infty,t_d]} f(x)\,dx = F(t_1,\dots,t_d) \overset{\text{Mon}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx \overset{(iii)}{=} 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq F \leq 1.$$

$\boxed{\lim_{t_1\to-\infty} F(t_1,\dots,t_d) = \dots = \lim_{t_d\to-\infty} F(t_1,\dots,t_d) = 0}$

b) Sei weiter $k \in \{1,\dots,d\}$ bel. Dann gilt

$$\lim_{t_k\to-\infty} \mathbb{1}_{(-\infty,t_1]\times\dots\times(-\infty,t_d]}(x)\, f(x) \underset{(-\infty,t_k]\to\emptyset}{=} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

und da $f \geq \mathbb{1}_{(-\infty,t_1]\times\dots\times(-\infty,t_d]} f$ gilt und f integrierbar ist, folgt mit DCT:

$$\lim_{t_k\to-\infty} F(t_1,\dots,t_d) \overset{\text{Def}}{=} \lim_{t_k\to-\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{(-\infty,t_1]\times\dots\times(-\infty,t_d]}(x) f(x)\,dx$$

$$\overset{\text{DCT}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{t_k\to-\infty} \mathbb{1}_{(-\infty,t_1]\times\dots\times(-\infty,t_d]}(x) f(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} 0\,dx = 0$$

c) Sei nun $((t_1^n,\dots,t_d^n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$ mit $t_k^n \uparrow \infty$ $\forall k \in \{1,\dots,d\}$

Dann gilt

$$\mathbb{1}_{(-\infty,\underset{\nearrow \mathbb{R}}{t_1^n}]\times\dots\times(-\infty,\underset{\uparrow \mathbb{R}}{t_d^n}]} \cdot f \uparrow f,$$

$\boxed{\lim_{t_1\to\infty,\dots,t_d\to\infty} F(t_1,\dots,t_d) = 1}$

also folgt mit MCT:

$$\lim_{n\to\infty} F(t_1^n,\dots,t_d^n) \overset{\text{Def}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{(-\infty,t_1^n]\times\dots\times(-\infty,t_d^n]} f(x)\,dx$$

$$\overset{\text{MCT}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx \overset{(iii)}{=} 1$$

$$\Rightarrow \lim_{t_1\to\infty,\dots,t_d\to\infty} F(t_1,\dots,t_d)=1$$

d) Nun zur Rechtecksmonotonie:

Für $A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $x_k \in \mathbb{R}$, $k\in\{1,\dots,d\}$ gilt

$$\mathbb{1}_{A_1\times\dots\times A_d}(x_1,\dots,x_d)=\prod_{k=1}^{d}\mathbb{1}_{A_k}(x_k)$$

$\forall\, t^1,t^2\in\mathbb{R}^d$ mit $t^1\le t^2$ gilt
$$\Delta_{t^1}^{t^2}F := \sum_{i_1,\dots,i_d\in\{1,2\}} (-1)^{i_1+\dots+i_d}F(t_1^{i_1},\dots,t_d^{i_d})\ge 0$$

Den Differenzoperator mit $t^1\le t^2\in\mathbb{R}^d$, d.h. $t_k^1\le t_k^2\ \forall k\in\{1,\dots,d\}$.

Kann man schreiben als

$$\Delta_{t_2}^{t^1}F=\sum_{i_1=1}^{2}(-1)^{i_1}\sum_{i_2=1}^{2}(-1)^{i_2}\cdots\sum_{i_d=1}^{2}(-1)^{i_d}F(t_1^{i_1},\dots,t_d^{i_d})$$

$$=\sum_{i_1=1}^{2}(-1)^{i_1}\cdots\sum_{i_d=1}^{2}(-1)^{i_d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{1}_{(-\infty,t_1^{i_1}]\times\dots\times(-\infty,t_d^{i_d}]}(x)f(x)\,dx$$

$$\overset{\text{Lin}}{=}\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{i_1=1}^{2}(-1)^{i_1}\cdots\sum_{i_d=1}^{2}(-1)^{i_d}\prod_{k=1}^{d}\mathbb{1}_{(-\infty,t_k^{i_k}]}(x_k)f(x)\,dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\sum_{i_1=1}^{2}(-1)^{i_1}\cdots\sum_{i_{d-1}=1}^{2}(-1)^{i_{d-1}}\left(\prod_{k=1}^{d-1}\mathbb{1}_{(-\infty,t_k^{i_k}]}(x_k)\underbrace{\left(\mathbb{1}_{(-\infty,t_d^2]}(x_d)-\mathbb{1}_{(-\infty,t_d^1]}(x_d)\right)}_{=\sum_{i_d=1}^{2}(-1)^{i_d}\mathbb{1}_{(-\infty,t_d^{i_d}]}}\right)dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\mathbb{1}_{(t_d^1,t_d^2]}(x_d)\sum_{i_1=1}^{2}(-1)^{i_1}\cdots\sum_{i_{d-1}=1}^{2}(-1)^{i_{d-1}}\prod_{k=1}^{d-1}\mathbb{1}_{(-\infty,t_k^{i_k}]}(x_k)\,dx$$

(Induktiv folgt)

$$=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\prod_{k=1}^{d}\mathbb{1}_{(t_k^1,t_k^2]}(x_k)\,dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d}\underbrace{\mathbb{1}_{(t_1^1,t_1^2]\times\dots\times(t_d^1,t_d^2]}(x)f(x)}_{\ge 0}\,dx\ \overset{\text{Mon}}{\ge}\ 0$$

$\Rightarrow F$ ist rechtecksmonoton

e) Seien weiter $t_1,\dots,t_d\in\mathbb{R}$ und für bel. $k\in\{1,\dots,d\}$ $(t_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $t_k^n\downarrow t_k$.

$(-\infty,t_k^n]\downarrow(-\infty,t_k]$

F ist rechtsstetig in jeder Koordinate

Dann gilt:

$$\mathbb{1}_{(-\infty,t_1]\times\ldots\times(-\infty,t_k^n]\times\ldots\times(-\infty,t_d]}f \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{1}_{(-\infty,t_1]\times\ldots\times(-\infty,t_k]\times\ldots\times(-\infty,t_d]}f$$

punktweise und damit

$\mathbb{1}_{(-\infty,t_1]\times\ldots\times(-\infty,t_k^n]\times\ldots\times(-\infty,t_d]}f \le f \quad \forall n\in\mathbb{N}$. Da f integrierbar ist,

folgt mit DCT

$$\lim_{n\to\infty} F(t_1,\ldots,t_k^n,\ldots,t_d) \overset{\text{Def}}{=} \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{1}_{(-\infty,t_1]\times\ldots\times(-\infty,t_k^n]\times\ldots\times(-\infty,t_d]}(x)f(x)\,dx$$

$$\overset{\text{DCT}}{=} \int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{1}_{(-\infty,t_1]\times\ldots\times(-\infty,t_k]\times\ldots\times(-\infty,t_d]}(x)\,f(x)\,dx$$

$$\overset{\text{Def}}{=} F(t_1,\ldots,t_k,\ldots,t_d)$$

Da k und (t_k^n) beliebig gewählt werden können, folgt die Rechtsstetigkeit in jeder Komponente von F.

$\Rightarrow F$ ist multivariate VF.

$X_1, X_2 \overset{uiv}{\sim} \mathcal{U}([0,1])$

a) <u>Ges:</u> $\mathbb{E}[X_1^3 \cdot X_2]$

<u>Lsg:</u> Da $X_1^3 X_2 \geq 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher, ist der Erwartungswert wohldefiniert.

Da $X_1, X_2 \overset{uiv}{\sim} \mathcal{U}([0,1])$ gilt mit den Rechenregeln für stetige ZV:

$$\mathbb{E}[X_1^3 X_2] = \int_{\mathbb{R}^2} x_1^3 x_2 \, \mathbb{1}_{[0,1]}(x_1) \, \mathbb{1}_{[0,1]}(x_2) \, d(x_1, x_2)$$

$$\overset{(*)}{=} \int_0^1 x_2 \int_0^1 x_1^3 \, dx_1 \, dx_2$$

$$= \int_0^1 x_2 \left[\frac{1}{4} x_1^4 \right]_0^1 dx_2$$

$$= \int_0^1 \frac{x_2}{4} \, dx_2 = \left[\frac{x_2^2}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

(*) Die Abbildung $(x_1, x_2) \longmapsto x_1^3 x_2 \, \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x_1, x_2)$ ist nicht-negativ und messbar, da

- $(x_1, x_2) \longmapsto x_1^3 x_2$ ist stetig, also messbar
- $[0,1]^2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x_1, x_2)$ ist messbar

Also darf Fubini verwendet werden, da das Produkt messbarer Funktionen messbar ist.

b) Es gilt

$$\mathrm{Cov}(-X_1+3, X_1) \overset{\text{Def.}}{=} \mathbb{E}[(3-X_1-(\mathbb{E}[-X_1)-3)(X_1-\mathbb{E}[X_1])$$

$$= \mathbb{E}[-(X_1-\mathbb{E}[X_1])(X_1-\mathbb{E}[X_1])]$$

$$\overset{\text{Lin}}{=} -\mathbb{E}[(X_1-\mathbb{E}[X_1])^2)$$

$$\overset{\text{Def.}}{=} -\mathbb{V}[X_1]$$

$$\overset{X_1 \sim \mathcal{U}([0,1])}{=} -\frac{1}{12}$$

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex

a)

<u>Beh:</u> Für $\lambda_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

<u>Bew:</u> Sei $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und betrachte das W-Maß $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ mit $\mathbb{P}(\{x_i\}) = \lambda_i$.

Sei $X \sim \mathbb{P}$ (d.h. $\mathbb{P}(X = x_i) = \lambda_i$ für $i = 1, \dots, n$).

Dann gilt mit den Rechenregeln für diskrete Verteilungen

$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$ (endliche Summe, also wohldefiniert)

Für $f = \mathrm{id}$ erhalten wir also $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.

Also gilt mit Jensen (f ist konvex)

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = f(\mathbb{E}[X]) \overset{\text{Jensen}}{\leq} \mathbb{E}[f(X)] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

b)

<u>Beh:</u> Für $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig gilt

$$f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)\,dx\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(g(x))\,dx$$

<u>Bew:</u> Sei $X \sim \mathcal{U}([a,b])$. Dann gilt mit Rechenregeln für stetige Verteilungen

$$\mathbb{E}[g(X)] = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{sowie}$$

$$\mathbb{E}[f(g(X))] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(g(x))\,dx$$

Da f konvex ist, gilt wiederum mit Jensen (falls $\mathbb{E}[|f(g(x))|] < \infty$)

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx\right) = f\left(\mathbb{E}[g(x)]\right)$$

$$\overset{\text{Jensen}}{\leq} \mathbb{E}[f(g(x))]$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(g(x))\,dx$$