

Sei $X_k \sim \text{Poi}(\lambda_k)$. Dann gilt (e^{tx_k} ist als Verknüpfung messbarer Funktionen messbar und nicht negativ)

$$\mathbb{E}[e^{tx_k}] = \sum_{l=0}^{\infty} e^{tl} e^{-\lambda_k} \frac{\lambda_k^l}{l!}$$

$$\stackrel{\text{lin.}}{=} e^{-\lambda_k} \sum_{l=0}^{\infty} (e^t)^l \frac{\lambda_k^l}{l!}$$

$$= e^{-\lambda_k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda_k)^l}{l!}$$

$$\stackrel{\text{Reihendarst. von exp(.)}}{=} e^{-\lambda_k} e^{e^t \lambda_k} = e^{\lambda_k(e^t - 1)}$$

Insbesondere $\mathbb{E}[e^{tx_k}] < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Mit der Unabhängigkeit von $X_1, \dots, X_n$ gilt für die Summe $Z := \sum_{k=1}^n X_k$

$$\mathbb{E}[e^{tZ}] = \mathbb{E}[e^{t \sum_{k=1}^n X_k}]$$

$$= \mathbb{E}[e^{tX_1} e^{tX_2} \dots e^{tX_n}]$$

$$\stackrel{\text{unabh.}}{=} \mathbb{E}[e^{tX_1}] \mathbb{E}[e^{tX_2}] \dots \mathbb{E}[e^{tX_n}]$$

$$\begin{aligned} \text{so.} &= e^{\lambda_1(e^t - 1)} e^{\lambda_2(e^t - 1)} \dots e^{\lambda_n(e^t - 1)} \\ &= e^{(\sum_{k=1}^n \lambda_k)(e^t - 1)} \end{aligned}$$

$$\text{so.} = \mathbb{E}[e^{tY}] \quad \text{für } Y \sim \text{Poi}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)$$

Also gilt $M_z(t) = M_y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$

(also auch für eine Nullumgebung $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$)

Aus der Eindeutigkeit der momentenerzeugenden

Funktion folgt nun $Z \sim \text{Poi}(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k)$.

X, Y unabh. ZV auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(Y=1) = p \in (0,1), \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(Y=0) = 1-p$$

a) Beh: $X+Y$ und $X-Y$ sind unkorreliert

Bew: Da X und Y unabhängig sind gilt:

$$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \mathbb{P}(X=1) \mathbb{P}(Y=1) = p^2$$

$$\mathbb{P}(X=1, Y=0) = \mathbb{P}(X=1) \mathbb{P}(Y=0) = p(1-p)$$

$$\mathbb{P}(X=0, Y=1) = \mathbb{P}(X=0) \mathbb{P}(Y=1) = (1-p)p$$

$$\mathbb{P}(X=0, Y=0) = \mathbb{P}(X=0) \mathbb{P}(Y=0) = (1-p)^2$$

und da $p^2 + 2p(1-p) + (1-p)^2 = (p + (1-p))^2 = 1$ gilt, nimmt der

Vektor $(X, Y)^T$ f.s. nur Werte in $\{(1,1)^T, (0,1)^T, (1,0)^T, (0,0)^T\}$ an.

Also gilt

$$\mathbb{E}[X+Y] = (1+1)\mathbb{P}(X=1, Y=1) + (1+0)\mathbb{P}(X=1, Y=0)$$

$$+ (0+1)\mathbb{P}(X=0, Y=1) + (0+0)\mathbb{P}(X=0, Y=0) = 2p$$

$$\mathbb{E}[p(X, Y)]$$

$$= \sum p(X, Y) \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

und analog $\mathbb{E}[X-Y] = 0p^2 + 1p(1-p) + (-1)p(1-p) + 0(1-p)^2 = 0$

[Man hätte hier auch einfach die Linearität des Erwartungswerts

ausnutzen können.] $\mathbb{E}[X+Y] \stackrel{\text{lin}}{=} \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0$

Also gilt:

$$+ p \cdot 1 + ((1-p) \cdot 0) = 2p$$

$$\text{Cov}(X+Y, X-Y) = \mathbb{E}[(X+Y - \mathbb{E}[X+Y])(X-Y - \mathbb{E}[X-Y])]$$

$$= \mathbb{E}[(X+Y-2p)(X-Y)]$$

$$\text{Cor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)} \sqrt{\text{Var}(Y)}}$$

$$= (1+1-2p)(1-1)\mathbb{P}(X=1, Y=1)$$

$$+ (1+0-2p)(1-0)\mathbb{P}(X=1, Y=0)$$

$$+ (0+1-2p)(0-1)\mathbb{P}(X=0, Y=1)$$

$$+ (0+0-2p)(0-0)\mathbb{P}(X=0, Y=0)$$

$$= 0p^2 + (1-2p)p(1-p) - (1-2p)p(1-p) + 0(1-p)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(X+Y, X-Y) = 0 \Rightarrow \text{Cor}(X+Y, X-Y) = 0$$

$\Rightarrow X+Y$ und $X-Y$ sind unkorreliert

$$P(X=1) = P(Y=1) = p, \quad P(X=0) = P(Y=0) = (1-p)$$

$$P(X=n, Y=k) \neq 0 \text{ nur für } (n,k) \in \{(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)\}$$

b) Beh: $X+Y$ und $X-Y$ sind nicht unabhängig

Bew: Es gilt $P(X+Y=2, X-Y=1) = 0$, da

$$X+Y=2 \wedge X-Y=1 \Leftrightarrow X=1,5 \wedge Y=0,5 \text{ gilt}$$

und $P(X=1,5, Y=0,5) = 0$. Jedoch gilt

$$\begin{aligned} P(X+Y=2) P(X-Y=1) &= P(X=1, Y=1) P(X=1, Y=0) \\ &= p^2 p(1-p) \neq 0 \end{aligned} \quad \rightarrow P(X=1) P(Y=1)$$

$$\Rightarrow P_{(X+Y, X-Y)} \neq P_{X+Y} \otimes P_{X-Y}$$

$\Rightarrow X+Y$ und $X-Y$ sind nicht unabhängig $\square$

$$P(X+Y=2, X-Y=1) = P_{(X+Y, X-Y)}((2,1)) = 0$$

$$P(X+Y=2) P(X-Y=1) = P_{(X+Y)}(\{2\}) \cdot P_{(X-Y)}(\{1\}) \neq 0$$

$$X, Y \text{ unabh.} \Leftrightarrow P_{X,Y} = P_X \otimes P_Y$$

(X, Y) Zufallsvektor mit gemeinsamer Dichte

$$f(x, y) = \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y} \mathbb{1}_{(0, \infty)^2}(x, y)$$

Ges: Randdichte von Y , $\mathbb{E}[XY]$

Lsg: Nach VL gilt

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) \mathbb{1}_{(0, \infty)}(y) dx$$

$$\stackrel{\text{LH}}{=} \frac{e^{-y}}{y} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(y) \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{y}} dx$$

$$\stackrel{\text{MCT}}{+ \text{HDI}} = \frac{e^{-y}}{y} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(y) \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[f_Y(y) e^{-\frac{x}{y}} \right]_0^n}_{= 0+y}$$

$$= e^{-y} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(y)$$

Sei nun $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$.

g ist stetig und somit auch messbar.

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[g(X, Y)]$$

($\mathbb{P}(g(X, Y) \geq 0) = 1$
 $\Rightarrow \mathbb{E}$ ist wohldef.)

$$\stackrel{\substack{X, Y \\ \text{gemeinsam} \\ \text{stetig verteilt}}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) f(x, y) d(x, y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} xy \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y} \mathbb{1}_{(0, \infty)^2}(x, y) d(x, y)$$

Fubini,
Integrand ist
positiv und
messbar als
Prod. von
stetigen/unb.
Abbildungen

$$= \int_0^\infty e^{-y} \int_0^\infty x e^{-\frac{x}{y}} dx dy$$

Wir betrachten zuerst das "dx"-Integral

Mit MCT und part. Integration ($x \mapsto x e^{-\frac{x}{y}} 1_{(0,n)}(x)$
ist unb. ≥ 0)

$$\int_0^\infty x e^{-\frac{x}{y}} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left[x(-y) e^{-\frac{x}{y}} \right]_0^n}_{=0, e^{-\frac{x}{y}} \text{ dominiert lineares Wachstum}} + y \int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}} dx$$

$$\begin{aligned} \text{MCT} \\ + \text{HdI} &= \lim_{n \rightarrow \infty} y \left[(-y) e^{-\frac{x}{y}} \right]_0^n \\ &= y^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[XY] = \int_0^\infty e^{-y} \int_0^\infty x e^{-\frac{x}{y}} dx dy$$

$$\text{s.o.} = \int_0^\infty e^{-y} y^2 dy$$

$$\begin{aligned} \text{MCT} \\ \text{part. Int.} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left[-e^{-y} y^2 \right]_0^n}_{=0, \exp(\cdot) \text{ dominiert Polynome}} + \int_0^\infty 2e^{-y} y dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{MCT} \\ \text{part. Int.} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left[2(-e^{-y}) y \right]_0^n}_{=0, \text{ s.o.}} + \int_0^\infty 2e^{-y} dy \end{aligned}$$

$$\text{MCT}_{\text{part. int.}} = \lim_{n \rightarrow \infty} [-2e^{-\gamma}]_0^n = 2.$$

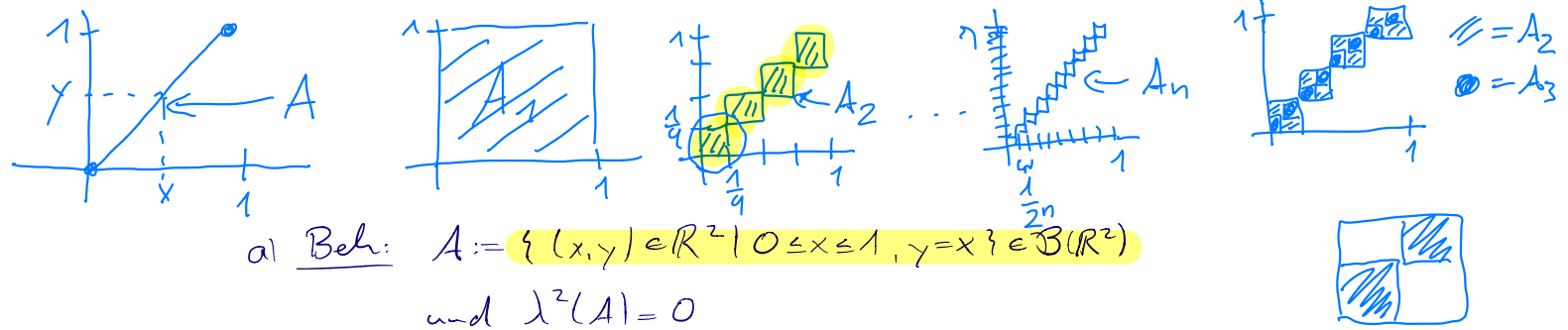
MCT dürfte jeweils verwendet werden, da

$$\gamma \mapsto e^{-\gamma} \gamma^2 1(\cos, \zeta)$$

$$\gamma \mapsto e^{-\gamma} 2\gamma 1(\cos, \zeta)$$

$$\gamma \mapsto 2e^{-\gamma} 1(\cos, \zeta)$$

messbare und nicht-negative Abbildungen sind.



a) Beh: $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, y = x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$
und $\lambda^2(A) = 0$

$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]$$

Länge $\frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n} = \frac{1}{2^n}$

$$A_n := \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right] \times \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right] \quad \forall n \geq \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$$

Da $\{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \mid a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}\}$ ein Erzeugnis von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ ist gilt $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Darüber hinaus gilt per Konstruktion $A_n \downarrow A$, also

$$\lambda_{A_1}^2(\mathbb{R}^2)$$

$$\begin{aligned} &= \lambda^2(\mathbb{R}^2 \cap A_1) \\ &= \lambda^2([0,1] \times [0,1]) \\ &= (1-0)(1-0) = 1 \end{aligned}$$

Daher gilt einerseits $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ und andererseits $\lambda_{A_n}^2(A) = \lambda^2(A_n \cap A) = \lambda_{A_n}^2(A)$, da $A_n \supseteq A$ wobei $\lambda_{A_n}^2$ die Einschränkung von λ^2 auf $(A_n, \mathcal{B}(A_n))$ ist. $\lambda_{A_n}^2$ ist ein endliches

Maß, daher können wir die Stetigkeit von Maßen nutzen

$$0 \leq \lambda^2(A) = \lambda_{A_n}^2(A) = \lambda_{A_n}^2\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{A_1}^2(A_n) &= \lambda_{A_1}^2\left(\bigcup_{k=0}^{2^n-1} \dots\right) \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \lambda_{A_1}^2(\dots) \end{aligned}$$

Jeder Summand ist gleich groß und unabhängig von k .

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{A_1}^2(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^{2n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

b) Beh: (X, X) hat keine Dichte für $X \sim \mathcal{U}([0,1])$

Bew: Da $X \sim \mathcal{U}([0,1])$, gilt $\mathbb{P}_{(X,X)}(\mathbb{R}^2 \setminus A) = 0$.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x = y\}$$

Sei f eine Dichte von (X, X) .

Dann gilt

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus A} f(x) dx$$

$$p(x) = p(x) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2}(x) = p(x) \mathbb{1}_A(x) + p(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus A}(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} p(x) dx \stackrel{!}{=} \int_{\mathbb{R}^2} p(x) \cdot \mathbb{1}_A(x) dx + \int_{\mathbb{R}^2} p(x) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus A}(x) dx$$

$$= \underbrace{\int_A f(x) dx}_{=0} + \underbrace{P_{(x,x)}(\mathbb{R}^2 \setminus A)}_{=0} = \int_B p(x) dx$$

$P_{(x,x)}(B)$

Da A aber eine Nullmenge ist, gilt aber

$$\int_A f(x) dx = 0 = P_{(x,x)}(\mathbb{R}^2 \setminus A), \text{ also gilt}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx = 0 \neq 1 \quad \text{!}$$

$\Rightarrow f$ kann keine Dichte besitzen

$$\lambda^2(A) = 0$$

X, Y unabh. ZV auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

$$\mathbb{P}_X \sim \mathbb{P}_Y \sim \text{Exp}(1)$$

Beh. $\frac{X}{X+Y} \sim \mathcal{U}([0,1])$

Bew. Da X und Y exponentialverteilt sind, gilt

$$X > 0 \text{ f.s.}, Y > 0 \text{ f.s.}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{X}{X+Y} < 1 \text{ f.s.}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{X}{X+Y} \leq t\right) = 0 \quad \forall t \in (-\infty, 0] \text{ und}$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{X+Y} \leq t\right) = 1 \quad \forall t \in [1, \infty)$$

Sei nun $t \in (0,1)$.

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt } \mathbb{P}\left(\frac{X}{X+Y} \leq t\right) &= \mathbb{P}(X \leq (X+Y)t, \underline{X+Y > 0}) \\ &\quad + \underbrace{\mathbb{P}(X \geq (X+Y)t, X+Y \leq 0)}_{=0} \\ &= \mathbb{P}(X(1-t) \leq Yt) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq Y \frac{t}{1-t}\right), \end{aligned}$$

wobei wir $X \geq 0, Y \geq 0$ nicht nutzen. Da $X, Y \sim \text{Exp}(1)$ gilt und X und Y unabhängig sind gilt zudem für die Dichte von (X,Y) :

$$f_{(X,Y)} = e^{-x} e^{-y} \mathbb{1}_{(0,\infty) \times (0,\infty)}(x,y) \geq 0$$

Also folgt für die Verteilungsfunktion von $\frac{X}{X+Y}$ mit $t \in (0,1)$:

$$\begin{aligned} F_{\frac{X}{X+Y}}(t) &= \mathbb{P}\left(\frac{X}{X+Y} \leq t\right) = \mathbb{P}\left(X \leq Y \frac{t}{1-t}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{[-\infty, Y \frac{t}{1-t}]}(x) f_{(X,Y)}(x,y) d(x,y) \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-\infty, Y \frac{t}{1-t}]}(x) e^{-x-y} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) e^{-y} [-e^{-x}]_0^{Y \frac{t}{1-t}} dy \\ &= \int_0^{\infty} e^{-y} (1 - e^{-Y \frac{t}{1-t}}) dy \end{aligned}$$

$$1 + \frac{t}{1-t}$$

$$\frac{1-t}{1-t} + \frac{t}{1-t} = \frac{1}{1-t}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-y} - e^{-y - y \frac{t}{1-t}} dy$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-y} - e^{-y(1 + \frac{t}{1-t})} dy$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-y} - e^{-y \frac{1}{1-t}} dy$$

$$= \left[-e^{-y} + (1-t) e^{-y \frac{1}{1-t}} \right]_0^{\infty} = -(-1 + 1-t) = t$$

$$X \leq Y \frac{t}{1-t}$$

$$X \leq q, \quad q \leq Y \frac{t}{1-t}$$

$$X \leq q, \quad q \cdot \frac{1-t}{t} \leq Y$$

Fubini darf angewandt werden, da die Funktion

$$\mathbb{1}_{(-\infty, Y \frac{t}{1-t}]}(x) f_{(x,y)}(x,y) \geq 0 \text{ ist und } \{(x,y) \mid x \leq Y \frac{t}{1-t}\}$$

$$= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (-\infty, q] \times [q \frac{1-t}{t}, \infty)$$

$$\cup (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \text{ ist}$$

und daher $\mathbb{1}_{(-\infty, Y \frac{t}{1-t}]}(x)$ messbar ist.

Da P ein σ -Maß ist, ist es insbesondere ein endliches, also insbesondere ein σ -endliches Maß.

Zusammen gilt:

$$F_{\frac{x}{x+y}}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & 0 < t \leq 1 \\ 1, & 1 < t \end{cases}, \quad \text{also } F_{\frac{x}{x+y}} = F_u \text{ mit } u \sim U([0,1])$$

woraus die Beh. folgt.