Stochastik I

9. Große Übung

Felix Schamoni
Prof. Dr. Leif Döring

02.11.2022

Zufallsvariablen und stochastische Modelle

Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann heißt eine $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Abbildung

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto X(\omega),$$

Zufallsvariable.

- Eine Zufallsvariable X ordnet also jedem Elementarereignis ω einen Wert/eine Auszahlung in $\mathbb{R}$ zu.
- Wenn $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist, ist auch $f(X)$ eine Zufallsvariable, da die Verkettung messbarer Abbildungen messbar ist.

Definition

Ein stochastisches Modell besteht aus

$\mathbb{P}$

- einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (hier wird der Zufall modelliert),
- einer Zufallsvariable X (hier wird die Auszahlung/Beobachtung modelliert).

Verteilungen von Zufallsvariablen

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B) \overset{\text{Not.}}{=} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

$B = (-\infty, t]$

Verteilung von X.

- Hier wird die Messbarkeit von X wichtig, da wir dadurch wissen, dass $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt und somit $\mathbb{P}_X(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ wohldefiniert ist.
- $\mathbb{P}_X$ ist der push-forward (das Bildmaß) von X.
- Nach der Vorlesung ist $\mathbb{P}_X$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
  $\rightsquigarrow$ Verteilungsfunktionen und Erwartungswerte

Verteilungsfunktionen von Zufallsvariablen

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$F_X \colon \mathbb{R} \to [0,1], \quad t \mapsto F_X(t) := \mathbb{P}(X \le t) = \mathbb{P}_X((-\infty, t]),$$

Verteilungsfunktion von X. Man schreibt dann $X \sim F_X$.

- Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen ist also die Verteilungsfunktion der Verteilung der Zufallsvariablen bzw. des push forwards der Zufallsvariablen.
- Eine ZV heißt absolutstetig, falls die zugehörige Verteilungsfunktion stetig ist.
- Eine ZV heißt diskret, falls die zugehörige Verteilungsfunktion diskret ist.

Der kanonische Wahrscheinlichkeitsraum

Typisches Problem: Wir möchten ein Warteschlangensystem modellieren und nehmen an, dass die Zwischenankunftszeiten der Kunden exponentialverteilt sind. Gibt es überhaupt ein passendes stochastisches Modell (das heißt eine Kombination aus W-Raum und ZV)?

Satz (Existenz stochastischer Modelle)

Für jede Verteilungsfunktion existiert eine Zufallsvariable X mit $X \sim F$. Genauer: Es existiert ein stochastisches Modell, d.h. ein W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und einer ZV X auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $X \sim F$.

Der Beweis ist sogar ziemlich einfach. Wir setzen einfach $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_F$ und $X(\omega) = \omega$. Das reicht.

$$\mathbb{P}_X((-\infty, t]) = F(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Erwartungswerte von Zufallsvariablen

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$\mathbb{E}[X] := \int_{\Omega} X(\omega)\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$$

Erwartungswert von X, falls das Integral existiert.

- Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen wird interpretiert als der erwartete Mittelwert der Auszahlung eines Zufallsexperiments bei häufiger Durchführung. Er wird auch als Schwerpunkt der Wahrscheinlichkeitsmasse von $\mathbb{P}_X$ angesehen.
- Trotzdem gilt häufig $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}[X]) = \mathbb{P}_X(\{\mathbb{E}[X]\}) = 0$.
- Nach ÜB5 A4 gilt: $\mathbb{E}[X]$ existiert $\Leftrightarrow \mathbb{E}[|X|] < \infty$.
- Eine weitere wichtige Kennzahl einer Zufallsvariablen ist die Varianz.

Varianz von Zufallsvariablen

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$\mathbb{V}[X] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_\Omega (X(\omega) - \mathbb{E}[X])^2 \, d\mathbb{P}(\omega)$$

Varianz von X, falls das Integral existiert.

- Die Varianz gibt an wie stark eine Zufallsvariable X im Durchschnitt von ihrem Erwartungswert abweicht.

  Große Varianz $\rightsquigarrow$ Masse von $\mathbb{P}_X$ stark verteilt

  Kleine Varianz $\rightsquigarrow$ Masse von $\mathbb{P}_X$ zentriert um den Erwartungswert

- Es gilt: $\mathbb{E}[X^2] < \infty \Leftrightarrow \mathbb{V}[X] < \infty$ und $\mathbb{V}[X] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = \mathbb{E}[X]) = 1$ (Übungsblatt).

Transformationssatz

Wie berechnet man jetzt den Erwartungswert einer Zufallsvariablen? Das wichtigste Werkzeug dabei ist der Transformationssatz.

Satz (Transformationssatz)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}), (\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume, μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, $f\colon \Omega \to \Omega'$ und $g\colon \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann ist g μ_f-integrierbar genau dann, wenn $g \circ f$ μ-integrierbar ist, und falls eine dieser Eigenschaften erfüllt ist gilt

$$\int_\Omega g \circ f \, d\mu = \int_{\Omega'} g \, d\mu_f .$$

Anwendung des Transformationssatzes

Satz (Transformationssatz)

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume, μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, $f\colon \Omega \to \Omega'$ und $g\colon \Omega' \to \bar{\mathbb{R}}$. Dann ist g μ_f-integrierbar genau dann, wenn $g \circ f$ μ-integrierbar ist, und falls eine dieser Eigenschaften erfüllt ist gilt

$$\int_\Omega g \circ f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega'} g \,\mathrm{d}\mu_f.$$

Also gilt für eine Zufallsvariable X (d.h. X messbare Funktion von Ω nach $\mathbb{R}$) und eine messbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[f(X)] := \int_\Omega f(X(\omega)) \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \,\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x),$$

wenn $f \circ X$ $\mathbb{P}$-integrierbar oder f $\mathbb{P}_X$-integrierbar ist. Es reicht also aus die Verteilung der Zufallsvariablen X zu kennen!

$\rightsquigarrow$ Deshalb haben wir auch bisher von Erwartungswerten von Verteilungen (Wahrscheinlichkeitsmaßen) bzw. Verteilungsfunktionen gesprochen.

Aufgabe 1

Seien X und Y zwei identisch verteilte Zufallsvariablen (d.h. $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$) und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, sodass $\mathbb{E}[g(X)]$, $\mathbb{E}[g(Y)]$ existieren.
Zeige, dass

$$\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[g(Y)]$$

gilt. Beachte, dass X und Y nicht unbedingt auf dem gleichen W-Raum definiert sind. Was bedeutet das für den Einfluss des zugrundeliegenden W-Raums auf den Erwartungswert?

Wissen $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$. Sei X auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und Y auf $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_\Omega g(X(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) \overset{\text{Trafo}}{=} \int_{\mathbb{R}} g(x)\, d\mathbb{P}_X(x)$$

$$\overset{\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y}{=} \int_{\mathbb{R}} g(x)\, d\mathbb{P}_Y(x)$$

$$\overset{\text{Trafo}}{=} \int_{\Omega'} g(Y(\omega))\, d\mathbb{P}'(\omega)$$

$$= \mathbb{E}[g(Y)]$$

$$\mathbb{P}(X \in A)$$
$$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X \in A}]$$

Beispiele

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} x \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x), \\
\mathbb{V}[X] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}[X])^2 \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x), \\
\psi_X(t) &= \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}] = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{tx} \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x),
\end{aligned}
$$

falls die Integrale existieren.

- Wenn $\mathbb{P}_X$ eine Dichte hat oder eine Summe von Dirac-Maßen ist, wisst ihr aus der Vorlesung wie ihr diese Integrale berechnet. Ihr könnt damit jetzt auch Erwartungswerte von vielen Zufallsvariablen berechnen!
- Für die Varianz gilt zudem die sogenannte Verschiebungsformel (Übungsblatt) $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

Momenterzeugende Funktion

Die momenterzeugende Funktion erhält ihren Namen aufgrund des folgenden Theorems

Satz

Sei X eine Zufallsvariable, für die für irgendein $\varepsilon > 0$ die Momenterzeugende Funktion $\mathcal{M}_X$ auf dem Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert ist. Dann ist $\mathcal{M}_X$ an der Stelle 0 unendlich oft differenzierbar und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}[X^n] = \mathcal{M}_X^{(n)}(0),$$

wobei $\mathcal{M}_X^{(n)}(0)$ die n-te Ableitung an der Stelle 0 ist.

Markov- und Tschebycheff-Ungleichung

Satz

Sei X eine Zufallsvariable, dann gelten für $a > 0$ folgende Ungleichungen:

(i) *Für $h : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ wachsend gilt*

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[h(X)]}{h(a)}.$$

(ii) *Für $h : [0, \infty] \longrightarrow (0, \infty)$ wachsend gilt*

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[h(|X|)]}{h(a)}.$$

(iii)

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{a^2}.$$

Aufgabe 2

Sei eine Zufallsvariable $X \sim F$ gegeben, wobei F die folgende Dichte besitzt

$$f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \qquad \lambda > 0.$$

- Zeige, dass f tatsächlich eine Dichte ist.
- Berechne die zugehörige Verteilungsfunktion.
- Berechne den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$.

a) Überprüfe Eigenschaft

- $f \geq 0$, da $\lambda^2 \geq 0$, $e^{-\lambda x} \geq 0$ f $x \geq 0$ auf $[0,\infty)$
- $x \mapsto \lambda^2 x e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ ist als Prod. von mb. Fkt. wieder messbar

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$ ist wohldef. mit

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_0^\infty \lambda^2 x e^{-\lambda x}\,dx$$

$$\overset{\text{MCT}}{\underset{\text{P.I.}}{=}} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left[-\lambda x e^{-\lambda x}\right]_0^n}_{=0,\ \exp(\cdot)\ \text{dom.}} + \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$$

$$\overset{\text{MCT}}{\underset{\text{P.I.}}{=}} 0 + \lim_{n\to\infty} \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^n = 1.$$

b) Per Def. ist für $t \geq 0$.

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int_0^t \lambda^2 x e^{-\lambda x}\,dx$$

$$\overset{\text{p.I.}}{=} \left[\lambda^2 \left(-\frac{1}{\lambda}\right) x e^{-\lambda x}\right]_0^t + \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= -\lambda t e^{-\lambda t} + \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - \lambda t e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t}$$

$$= 1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)$$

Fall $t<0$:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int \lambda^2 x e^{-\lambda x} \underbrace{\mathbb{1}_{(0,\infty)} \mathbb{1}_{(-\infty,t)}}_{=0} \,dx$$

$$= \int 0\,dx = 0$$

c) Mit Trafo-Satz & RR für stetige Vert. ist

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\,d\mathbb{P}(\omega) \overset{\text{Trafo}}{=} \int_{\mathbb{R}} x\,d\mathbb{P}_X(x)$$

$$\overset{\text{RR}}{=} \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda x} x^2\,dx$$

[Integral wohldef., da $x \mapsto \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$ ist messbar und nichtnegativ]

$$\int_0^\infty \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x}\, dx$$

$$\overset{\text{MCT}}{\underset{\text{p.I.}}{=}} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left[-\lambda x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^n}_{=0,\ \text{da } \exp(-)\ \text{dom.}} + \underbrace{\int_0^\infty 2\lambda\, x e^{-\lambda x}\, dx}_{=\frac{2}{\lambda}\underbrace{\int_0^\infty \lambda^2 x e^{-\lambda x}\, dx}_{=1,\ \text{da Dichte}}}$$

$$= 0 + \frac{2}{\lambda}\cdot 1 = \frac{2}{\lambda}$$

Aufgabe 3

Sei Y eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Dichte

$$f(y) = cy(1-y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y), \ c \in \mathbb{R}.$$

Es gilt also

$$\mathbb{P}(Y \in B) = \int_B cy(1-y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)dy, \ \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Bestimme c und berechne $\mathcal{M}_Y$.

Bestimme c so, dass

$$1 \overset{!}{=} \mathbb{P}(Y \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} c\, y(1-y)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\, dy$$

$$= c \int_0^1 y(1-y)\, dy$$

$$= c \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1$$

$$= c\, \frac{1}{6}$$

$\Leftrightarrow c = 6.$

Da $e^{tY} \geq 0$ f messbar als Verknüpfung messbarer Abbildungen gilt für $t \neq 0$:

$$M_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] \overset{\text{Trafo + RR}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{ty} f(y)\,dy$$

$$= \int_0^1 6e^{ty} y(1-y)\,dy$$

$$= \int_0^1 6e^{ty} y\,dy - \int_0^1 6e^{ty} y^2\,dy$$

Wir berechnen zuerst mit partieller Integration

$$\bullet \int_0^1 e^{ty}\, y \, dy = \left[\frac{1}{t} e^{ty} y \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{t} e^{ty} \, dy$$

$$= \frac{1}{t} e^{t} - \left[\frac{1}{t^2} e^{ty} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{t} e^{t} - \frac{1}{t^2} e^{t} + \frac{1}{t^2}$$

$$\bullet \int_0^1 e^{ty}\, y^2 \, dy = \left[y^2 \frac{1}{t} e^{ty} \right]_0^1 - \int_0^1 2y \frac{1}{t} e^{ty} \, dy$$

$$= \frac{1}{t} e^{t} - \frac{2}{t} \int_0^1 y \, e^{ty} \, dy$$

$$= \frac{1}{t} e^t - \frac{2}{t}\left(\frac{1}{t} e^t - \frac{1}{t^2} e^t + \frac{1}{t^2} \right)$$

$$\Rightarrow M_Y(t) = 6\Big(\cancel{\frac{1}{t} e^t} - \frac{1}{t^2} e^t + \frac{1}{t^2} - \cancel{\frac{1}{t} e^t}$$

$$+ \frac{2}{t}\left(\frac{1}{t} e^t - \frac{1}{t^2} e^t + \frac{1}{t^2} \right)\Big)$$

$$= 6 \, \frac{-te^t + t + 2te^t - 2e^t + 2}{t^3} = 6 \, \frac{2 + t + e^t(t-2)}{t^3}$$

Sowie $M_Y(0) = 1$.