

Stochastik I

9. Große Übung

Felix Schamoni

Prof. Dr. Leif Döring

02.11.2022

Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann heißt eine $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Abbildung

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto X(\omega),$$

Zufallsvariable.

- Eine Zufallsvariable X ordnet also jedem Elementarereignis ω einen Wert/eine Auszahlung in \mathbb{R} zu.
- Wenn $f: (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist, ist auch $f(X)$ eine Zufallsvariable, da die Verkettung messbarer Abbildungen messbar ist.

Definition

Ein stochastisches Modell besteht aus

- einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (hier wird der Zufall modelliert),
- einer Zufallsvariable X (hier wird die Auszahlung/Beobachtung modelliert).

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B) \stackrel{\text{Not.}}{=} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

Verteilung von X .

- Hier wird die Messbarkeit von X wichtig, da wir dadurch wissen, dass $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt und somit $\mathbb{P}_X(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ wohldefiniert ist.
- \mathbb{P}_X ist der **push-forward (das Bildmaß)** von X .
- Nach der Vorlesung ist \mathbb{P}_X ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
↪ **Verteilungsfunktionen und Erwartungswerte**

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad t \mapsto F_X(t) := \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}_X((-\infty, t]),$$

Verteilungsfunktion von X . Man schreibt dann $X \sim F_X$.

- Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen ist also die Verteilungsfunktion der Verteilung der Zufallsvariablen bzw. des push forwards der Zufallsvariablen.
- Eine ZV heißt absolutstetig, falls die zugehörige Verteilungsfunktion stetig ist.
- Eine ZV heißt diskret, falls die zugehörige Verteilungsfunktion diskret ist.

Typisches Problem: Wir möchten ein Warteschlangensystem modellieren und nehmen an, dass die Zwischenankunftszeiten der Kunden exponentialverteilt sind. Gibt es überhaupt ein passendes stochastisches Modell (das heißt eine Kombination aus W-Raum und ZV)?

Satz (Existenz stochastischer Modelle)

Für jede Verteilungsfunktion existiert eine Zufallsvariable X mit $X \sim F$. Genauer: Es existiert ein stochastisches Modell, d.h. ein W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und einer ZV X auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $X \sim F$.

Der Beweis ist sogar ziemlich einfach. Wir setzen einfach $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_F$ und $X(\omega) = \omega$. Das reicht.

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$\mathbb{E}[X] := \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

Erwartungswert von X , falls das Integral existiert.

- Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen wird interpretiert als der **erwartete Mittelwert** der Auszahlung eines Zufallsexperiments bei **häufiger Durchführung**. Er wird auch als Schwerpunkt der Wahrscheinlichkeitsmasse von \mathbb{P}_X angesehen.
- Trotzdem gilt häufig $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}[X]) = \mathbb{P}_X(\{\mathbb{E}[X]\}) = 0$.
- Nach ÜB5 A4 gilt: $\mathbb{E}[X]$ existiert $\Leftrightarrow \mathbb{E}[|X|] < \infty$.
- Eine weitere wichtige Kennzahl einer Zufallsvariablen ist die **Varianz**.

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$\mathbb{V}[X] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{\Omega} (X(\omega) - \mathbb{E}[X])^2 d\mathbb{P}(\omega)$$

Varianz von X , falls das Integral existiert.

- Die Varianz gibt an wie stark eine Zufallsvariable X im Durchschnitt von ihrem Erwartungswert **abweicht**.
 - Große Varianz** \rightsquigarrow Masse von \mathbb{P}_X **stark verteilt**
 - Kleine Varianz** \rightsquigarrow Masse von \mathbb{P}_X **zentriert um den Erwartungswert**
- Es gilt: $\mathbb{E}[X^2] < \infty \Leftrightarrow \mathbb{V}[X] < \infty$ und $\mathbb{V}[X] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = \mathbb{E}[X]) = 1$ (Übungsblatt).

Wie berechnet man jetzt den Erwartungswert einer Zufallsvariablen? Das wichtigste Werkzeug dabei ist der **Transformationsatz**.

Satz (Transformationsatz)

Seien (Ω, \mathcal{A}) , (Ω', \mathcal{A}') messbare Räume, μ ein Maß auf (Ω, \mathcal{A}) , $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ und $g: \Omega' \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.
Dann ist g μ_f -integrierbar genau dann, wenn $g \circ f$ μ -integrierbar ist, und falls eine dieser Eigenschaften erfüllt ist gilt

$$\int_{\Omega} g \circ f \, d\mu = \int_{\Omega'} g \, d\mu_f.$$

Anwendung des Transformationssatzes

Satz (Transformationssatz)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}), (\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume, μ ein Maß auf (Ω, \mathcal{A}) , $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ und $g: \Omega' \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Dann ist g μ_f -integrierbar genau dann, wenn $g \circ f$ μ -integrierbar ist, und falls eine dieser Eigenschaften erfüllt ist gilt

$$\int_{\Omega} g \circ f \, d\mu = \int_{\Omega'} g \, d\mu_f.$$

Also gilt für eine Zufallsvariable X (d.h. X messbare Funktion von Ω nach \mathbb{R}) und eine messbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[f(X)] := \int_{\Omega} f(X(\omega)) \, d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, d\mathbb{P}_X(x),$$

wenn $f \circ X$ \mathbb{P} -integrierbar oder f \mathbb{P}_X -integrierbar ist. **Es reicht also aus die Verteilung der Zufallsvariablen X zu kennen!**

↪ Deshalb haben wir auch bisher von Erwartungswerten von Verteilungen (Wahrscheinlichkeitsmaßen) bzw. Verteilungsfunktionen gesprochen.

Aufgabe 1

Seien X und Y zwei identisch verteilte Zufallsvariablen (d.h. $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$) und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, sodass $\mathbb{E}[g(X)]$, $\mathbb{E}[g(Y)]$ existieren. Zeige, dass

$$\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[g(Y)]$$

gilt. Beachte, dass X und Y nicht unbedingt auf dem gleichen W -Raum definiert sind. Was bedeutet das für den Einfluss des zugrundeliegenden W -Raums auf den Erwartungswert?

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \, d\mathbb{P}_X(x),$$

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}[X])^2 \, d\mathbb{P}_X(x),$$

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} \, d\mathbb{P}_X(x),$$

falls die Integrale existieren.

- Wenn \mathbb{P}_X eine Dichte hat oder eine Summe von Dirac-Maßen ist, wisst ihr aus der Vorlesung wie ihr diese Integrale berechnet. Ihr könnt damit jetzt auch Erwartungswerte von vielen Zufallsvariablen berechnen!
- Für die Varianz gilt zudem die sogenannte **Verschiebungsformel** (Übungsblatt)
 $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$

Die momenterzeugende Funktion erhält ihren Namen aufgrund des folgenden Theorems

Satz

Sei X eine Zufallsvariable, für die für irgendein $\varepsilon > 0$ die Momenterzeugende Funktion \mathcal{M}_X auf dem Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert ist. Dann ist \mathcal{M}_X an der Stelle 0 unendlich oft differenzierbar und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}[X^n] = \mathcal{M}_X^{(n)}(0),$$

wobei $\mathcal{M}_X^{(n)}(0)$ die n -te Ableitung an der Stelle 0 ist.

Satz

Sei X eine Zufallsvariable, dann gelten für $a > 0$ folgende Ungleichungen:

(i) Für $h : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ wachsend gilt

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[h(X)]}{h(a)}.$$

(ii) Für $h : [0, \infty] \rightarrow (0, \infty)$ wachsend gilt

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[h(|X|)]}{h(a)}.$$

(iii)

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{a^2}.$$

Aufgabe 2

Sei eine Zufallsvariable $X \sim F$ gegeben, wobei F die folgende Dichte besitzt

$$f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x), \quad \lambda > 0.$$

- Zeige, dass f tatsächlich eine Dichte ist.
- Berechne die zugehörige Verteilungsfunktion.
- Berechne den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$.

Aufgabe 3

Sei Y eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Dichte

$$f(y) = cy(1 - y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Es gilt also

$$\mathbb{P}(Y \in B) = \int_B cy(1 - y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)dy, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Bestimme c und berechne \mathcal{M}_Y .

