Stochastik I

8. Große Übung

Felix Schamoni
Prof. Dr. Leif Döring

26.10.2022

Wie nähere ich mich am besten einer neuen Aufgabe?

Typische Fragen:

- Wie sind die mathematischen Objekte, die in der Aufgabe vorkommen, definiert?
- Was sind die Voraussetzungen?
- Was muss ich zeigen, um die entsprechende Aussage zu beweisen?
- Welche Sätze/Beweise aus der Vorlesung könnten für die Aufgabe hilfreich sein?
- Welche Werkzeuge habe ich sonst noch zur Verfügung? Zum Beispiel
    - Bei Integralen: MCT, DCT, Fubini, partielle Integration, Substitution …
    - Bei Summen: Indexverschiebung …
    - In $\mathcal{L}^p$-Räumen: Hölder-/ Cauchy-Schwarz-Ungleichung …
- Lässt sich die Aussage auf eine bereits bekannte Aussage zurückführen? Bzw. ähnelt einer anderen Aussage?
- Welche Tricks könnten sonst nützlich sein? Zum Beispiel $+0$, $\times 1$, Trick der guten Menge, Dynkin-Systeme …
- Bei Beweisen: Welche Beweisstrategie passt am besten: Direkter oder indirekter Beweis, Widerspruchsbeweis, Induktion …

Anmerkung zu den Übungsblättern

Ihr habt die Hälfte der Übungsblätter überstanden - Zeit für ein kurzes Zwischenfazit:

- Wer schaut sich die Korrektur wirklich intensiv an?
- Wie lange braucht ihr durchschnittlich für das Blatt?
- Wer versucht wirklich alle Aufgaben zu bearbeiten?

Uns sind natürlich auch ein paar Sachen aufgefallen, deswegen achten wir ab jetzt vermehrt auf:

- Behauptung und Beweis sauber trennen,
- “$\Rightarrow$ nicht inflationär verwenden,
- klare Begründungen.

Ab nächster Woche gibt es auch wieder viele Rechenaufgaben, wo ihr viele Punkte sammeln könnt. Diese Semester werden wir keine Bonuspunkte verschenken!

Kurze Wiederholung - letzte Woche

Sei F eine Verteilungsfkt (stetig oder diskret)

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\, d\mathbb{P}_F$$

F diskret

Was sind die a_k, p_k?

Formel

$$\sum_{k=1}^{N} p_k\, g(a_k)$$

F stetig

wie sieht die Dichte f aus?

Formel

$$\int f(x)\, g(x)\, dx$$

Aufgabe 1

Für $\alpha > 0$ ist die sogenannte *Gammafunktion* definiert als

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt.$$

Wir benötigen die Gammafunktion, um später die Gammaverteilung definieren zu können. Die Gammafunktion besitzt die folgende nützliche Eigenschaft:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha) \quad \text{für } \alpha > 0.$$

Beweise diese Eigenschaft.

$$\Gamma(a+1) \overset{\text{Def}}{=} \int_0^\infty t^a e^{-t}\,dt$$

$$\overset{\text{MCT}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^n t^a e^{-t} \qquad \text{mit } f_n(t) = t^a e^{-t} \mathbb{1}_{[0,n]}(t)$$

- messbar ✓
- ≥ 0 ✓
- $f_n \to f$ ✓

$$\overset{\text{part. Int.}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\left[-t^a e^{-t}\right]_0^n + \int_0^n a t^{a-1} e^{-t}\,dt \right)$$

$$\overset{\text{MCT}}{=} \int_0^\infty a t^{a-1} e^{-t}\,dt - \underbrace{\lim_{n\to\infty} n^a e^{-n}}_{=0\text{, da } \exp(\cdot) \text{ dom.}}$$

$$\overset{\text{Def}}{=} a\,\Gamma(a)$$

$\mathcal{L}^p$-Räume

Definition

$f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt p-**fach integrierbar**, falls $\int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty$. Statt 2-fach integrierbar sagt man auch **quadratintegrierbar**, statt 1-fach integrierbar sagt man **integrierbar**.

$$f \ \mu\text{-int.} \overset{\text{alte}}{\underset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow}} \int_\Omega f^+ \mathrm{d}\mu < \infty, \int_\Omega f^- \mathrm{d}\mu < \infty \overset{\text{Übung}}{\Leftrightarrow} \int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu < \infty \overset{\text{neue}}{\underset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow}} f, \mu\text{-int.}$$

Definition

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{ f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \,\middle|\, \int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty \right\}.$$

Manchmal schreibt man auch $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ oder nur $\mathcal{L}^p$.

$\mathcal{L}^p$ ist ein Vektorraum!

Außerdem ist durch

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p$ gegeben. Die Definitheit ist allerdings nicht erfüllt, da $\|f\|_p = 0$ nur $f = 0$ fast sicher impliziert. Um dieses Problem zu umgehen, definieren wir die Äquivalenzrelation

$$f \sim g :\Leftrightarrow f = g \ \mu\text{-fast sicher}.$$

Der entstehende Quotientenraum $L^p(\mu) := \{[f] : f \in \mathcal{L}^p(\mu)\}$ ist dann ein normierter Raum und sogar auch ein Banachraum.

Integralungleichungen

Satz (Minkowski-Ungleichung)

Sei $p \geq 1$, so gilt

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Beide Seiten können den Wert $+\infty$ annehmen.

Satz (Hölder-Ungleichung)

Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\int_\Omega |fg| \, d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Beliebter Trick: Hölder mit $g = 1$: $\int_\Omega |f| \, d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \mu(\Omega)^{\frac{1}{q}}$.

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ eine positive, messbare Funktion. Wir betrachten das Maß $\mu = \sum_{k=1}^{n} \delta_k$. Integration bezüglich diesem Maß liefert

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Zeige, dass für $n \in \mathbb{N}, p \geq 1$ folgende Ungleichung gilt:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f(k) \right)^p \leq n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} f(k)^p.$$

① $f = \mathbb{1}_A$, A mb. $\int f \, d\mu \overset{\text{Def.}}{=} \mu(A)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \delta_k(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_A(k)$$

② $f = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(k) \, \mathbb{1}_{\{k\}}}_{=: \hat{f}}$ μ-fast sicher

$$\mu(f \neq \hat{f}) = \mu(\mathbb{R} \setminus \{1, \dots, n\}) = n - \mu(\{1, \dots, n\}) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{\mu}{\overset{\text{Def.}}{=}} \int f \, d\mu$$

$$= \int |f| \cdot 1 \, d\mu$$

Hölder mit $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ $\leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int 1^q d\mu\right)^{1/q}$

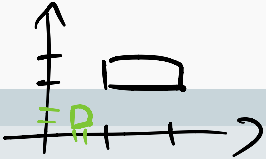
Def. μ, $f \geq 0$ $= \left(\sum_{k=1}^{n} f(k)^p\right)^{1/p} n^{1/q}$

$\ulcorner \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} f(k)^p \, n^{p-1}\right)^{1/p}$$

$$\overset{(\cdot)^p}{\Rightarrow} \left(\sum f(k)\right)^p \leq n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} f(k)^p$$

Produktmaß



Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ Maßräume.

Definition

i) Die σ-Algebra

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\})$$

heißt **Produkt-σ-Algebra** auf $\Omega_1 \times \Omega_2$.

ii) Ein Maß μ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ heißt **Produktmaß**, falls

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$$

für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt.

Satz: Das Produktmaß existiert und ist eindeutig!

Fubini

Satz (Fubini, $f \geq 0$)

Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume und $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow [0, +\infty]$ sei $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-messbar. Dann gelten

1. *Der innere Integrand ist messbar.*
2. *Der äußere Integrand ist messbar.*
3. $\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f_{\omega_1}(\omega_2) \, d\mu_2(\omega_2) \right) \, d\mu_1(\omega_1) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f_{\omega_2}(\omega_1) \, d\mu_1(\omega_1) \right) \, d\mu_2(\omega_2)$

Warnung: Auch wenn nur der Fubini-Flip genutzt wird, muss trotzdem die $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-Messbarkeit von f gezeigt werden, d.h. es reicht nicht die komponentenweise Messbarkeit.

Gemeinsame Messbarkeit vs. komponentenweise Messbarkeit

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben. Wie zeigt man, dass f messbar ist?

- Per Definition (reicht auf einem Erzeuger),
- als Verkettung/Summe/Produkt messbarer Funktionen,
- Stetigkeit der Abbildung nachweisen,
- $\dots$

Es reicht allerdings **nicht** zu zeigen, dass f komponentenweise (d.h. in jeder Koordinate) messbar ist. Es reicht also **nicht** die Messbarkeit von

- $y \mapsto f(x, y), \quad x \in \mathbb{R},$
- $x \mapsto f(x, y), \quad y \in \mathbb{R}$

zu zeigen.

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{B}([0,1])$ die Borel-σ-Algebra auf $[0,1]$ und $E \subset [0,1]$ eine nicht messbare Menge, d.h. $E \notin \mathcal{B}([0,1])$. Sei $f : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]^2$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in E \text{ und } x = y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeige

- f ist partiell messbar,
- f ist aber nicht $(\mathcal{B}([0,1])^2, \mathcal{B}([0,1]))$ messbar.

Hinweis: Für festes x lässt sich $y \mapsto f(x,y)$ als Indikator in y schreiben. Was gilt nun für $x \in E$ bzw. $x \notin E$.

(i) Sei $x \in [0,1]$ fest.

Dann gilt $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y = x \wedge x \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$= \begin{cases} 1, & y = x \wedge y \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \mathbb{1}_{\{x\} \cap E}(y)$$

Falls $x \in E$: $f(x,y) = \mathbb{1}_{\{x\}}(y)$

$x \notin E$: $f(x,y) = \mathbb{1}_{\emptyset}(y)$

Also ist $y \mapsto f(x,y)$ $\forall x$ messbar, da $S(x) \in \mathcal{B}[0,1]$ und $\emptyset \in \mathcal{B}[0,1]$

(ii) Ang. f messbar. Definiere $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}.$$

g ist ms, da stetig

Dann ist aber auch die Verknüpfung

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$ messbar

d.h. $E \in \mathcal{B}[0,1]$ $\lightning$ $\Rightarrow$ f ist nicht mb.