Stochastik I

8. Große Übung

Felix Schamoni
Prof. Dr. Leif Döring

26.10.2022

Wie nähere ich mich am besten einer neuen Aufgabe?

Typische Fragen:

- Wie sind die mathematischen Objekte, die in der Aufgabe vorkommen, definiert?
- Was sind die Voraussetzungen?
- Was muss ich zeigen, um die entsprechende Aussage zu beweisen?
- Welche Sätze/Beweise aus der Vorlesung könnten für die Aufgabe hilfreich sein?
- Welche Werkzeuge habe ich sonst noch zur Verfügung? Zum Beispiel
  - Bei Integralen: MCT, DCT, Fubini, partielle Integration, Substitution …
  - Bei Summen: Indexverschiebung …
  - In $\mathcal{L}^p$-Räumen: Hölder-/ Cauchy-Schwarz-Ungleichung …
- Lässt sich die Aussage auf eine bereits bekannte Aussage zurückführen? Bzw. ähnelt einer anderen Aussage?
- Welche Tricks könnten sonst nützlich sein? Zum Beispiel $+0$, $\times 1$, Trick der guten Menge, Dynkin-Systeme …
- Bei Beweisen: Welche Beweisstrategie passt am besten: Direkter oder indirekter Beweis, Widerspruchsbeweis, Induktion …

Anmerkung zu den Übungsblättern

Ihr habt die Hälfte der Übungsblätter überstanden - Zeit für ein kurzes Zwischenfazit:

- Wer schaut sich die Korrektur wirklich intensiv an?
- Wie lange braucht ihr durchschnittlich für das Blatt?
- Wer versucht wirklich alle Aufgaben zu bearbeiten?

Uns sind natürlich auch ein paar Sachen aufgefallen, deswegen achten wir ab jetzt vermehrt auf:

- Behauptung und Beweis sauber trennen,
- “$\Rightarrow$ nicht inflationär verwenden,
- klare Begründungen.

Ab nächster Woche gibt es auch wieder viele Rechenaufgaben, wo ihr viele Punkte sammeln könnt. Diese Semester werden wir keine Bonuspunkte verschenken!

Kurze Wiederholung - letzte Woche

Aufgabe 1

Für $\alpha > 0$ ist die sogenannte *Gammafunktion* definiert als

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} \, dt.$$

Wir benötigen die Gammafunktion, um später die Gammaverteilung definieren zu können. Die Gammafunktion besitzt die folgende nützliche Eigenschaft:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha) \quad \text{für } \alpha > 0.$$

Beweise diese Eigenschaft.

$\mathcal{L}^p$-Räume

Definition

$f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt p-**fach integrierbar**, falls $\int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty$. Statt 2-fach integrierbar sagt man auch **quadratintegrierbar**, statt 1-fach integrierbar sagt man **integrierbar**.

$$f \ \mu\text{-int.} \overset{\text{alte}}{\underset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow}} \int_\Omega f^+ \mathrm{d}\mu < \infty, \int_\Omega f^- \mathrm{d}\mu < \infty \overset{\text{Übung}}{\Leftrightarrow} \int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu < \infty \overset{\text{neue}}{\underset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow}} f, \mu\text{-int.}$$

Definition

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{ f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \,\middle|\, \int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty \right\}.$$

Manchmal schreibt man auch $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ oder nur $\mathcal{L}^p$.

$\mathcal{L}^p$ ist ein Vektorraum!

L^p-Räume

Außerdem ist durch

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p$ gegeben. Die Definitheit ist allerdings nicht erfüllt, da $\|f\|_p = 0$ nur $f = 0$ fast sicher impliziert. Um dieses Problem zu umgehen, definieren wir die Äquivalenzrelation

$$f \sim g :\Leftrightarrow f = g \ \mu\text{-fast sicher.}$$

Der entstehende Quotientenraum $L^p(\mu) := \{[f] : f \in \mathcal{L}^p(\mu)\}$ ist dann ein normierter Raum und sogar auch ein Banachraum.

Integralungleichungen

Satz (Minkowski-Ungleichung)

Sei $p \geq 1$, so gilt

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Beide Seiten können den Wert $+\infty$ annehmen.

Satz (Hölder-Ungleichung)

Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\int_\Omega |fg| \, d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Beliebter Trick: Hölder mit $g = 1$: $\int_\Omega |f| \, d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \mu(\Omega)^{\frac{1}{q}}$.

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ eine positive, messbare Funktion. Wir betrachten das Maß $\mu = \sum_{k=1}^{n} \delta_k$. Integration bezüglich diesem Maß liefert

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Zeige, dass für $n \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ folgende Ungleichung gilt:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f(k) \right)^{p} \leq n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} f(k)^{p}.$$

Produktmaß

Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ Maßräume.

Definition

i) Die σ-Algebra

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2)$$

heißt **Produkt-σ-Algebra** auf $\Omega_1 \times \Omega_2$.

ii) Ein Maß μ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ heißt **Produktmaß**, falls

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$$

für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt.

Satz: Das Produktmaß existiert und ist eindeutig!

Fubini

Satz (Fubini, $f \geq 0$)

Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume und $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow [0, +\infty]$ sei $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-messbar. Dann gelten

1. *Der innere Integrand ist messbar.*
2. *Der äußere Integrand ist messbar.*
3. $\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f_{\omega_1}(\omega_2) \, d\mu_2(\omega_2) \right) d\mu_1(\omega_1) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f_{\omega_2}(\omega_1) \, d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_2(\omega_2)$

Warnung: Auch wenn nur der Fubini-Flip genutzt wird, muss trotzdem die $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-Messbarkeit von f gezeigt werden, d.h. es reicht nicht die komponentenweise Messbarkeit.

Gemeinsame Messbarkeit vs. komponentenweise Messbarkeit

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben. Wie zeigt man, dass f messbar ist?

- Per Definition (reicht auf einem Erzeuger),
- als Verkettung/Summe/Produkt messbarer Funktionen,
- Stetigkeit der Abbildung nachweisen,
- ...

Es reicht allerdings **nicht** zu zeigen, dass f komponentenweise (d.h. in jeder Koordinate) messbar ist. Es reicht also **nicht** die Messbarkeit von

- $y \mapsto f(x, y), \quad x \in \mathbb{R}$,
- $x \mapsto f(x, y), \quad y \in \mathbb{R}$

zu zeigen.

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{B}([0,1])$ die Borel-σ-Algebra auf $[0,1]$ und $E \subset [0,1]$ eine nicht messbare Menge, d.h. $E \notin \mathcal{B}([0,1])$. Sei $f : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]^2$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in E \text{ und } x = y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeige

- f ist partiell messbar,
- f ist aber nicht $(\mathcal{B}([0,1])^2, \mathcal{B}([0,1]))$ messbar.

Hinweis: Für festes x lässt sich $y \mapsto f(x,y)$ als Indikator in y schreiben. Was gilt nun für $x \in E$ bzw. $x \notin E$.