Stochastik I

7. Große Übung

Felix Schamoni
Prof. Dr. Leif Döring

19.10.2022

Konvergenzsätze

Seien $f_1, f_2, \ldots$ messbare Funktionen, sodass der Grenzwert $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ fast sicher existiert. Wann gilt

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu,$$

d.h. wann darf Integral und Grenzwert getauscht werden?

Satz (Montone Konvergenz)

Seien $f, f_1, f_2, \ldots$ messbar und es gelte $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f$ sowie $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ fast überall. Dann gilt

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu,$$

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu$$

wobei $+\infty = +\infty$ möglich ist.

Satz (Dominierte Konvergenz)

Seien $f, f_1, f_2, \ldots$ messbar mit

a) $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ *fast überall,*

b) $|f_n| \leq g$ *fast überall für eine integrierbare Funktion g.*

Dann sind $f, f_1, f_2, \ldots$ auch integrierbar mit

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Integrale über W-Maße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Bis jetzt haben wir abstrakte Integrale $\int_\Omega f \, d\mu$ betrachtet, für die wir keine allgemeine Berechnungsformel haben. Wir beschränken uns nun auf W-Maße auf der Borel σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Der große Vorteil: nun korrespondiert jedes W-Maß zu einer **Verteilungsfunktion**, und das nutzen wir aus!

Frage: Welche 2 Arten von Verteilungsfunktionen haben wir besonders betrachtet? Wodurch waren sie charakterisiert?

Definition (Besondere Integrale)

Sei $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Verteilungsfunktion.

$\int_{\mathbb{R}} g(x)\, d\mathbb{P}_F(x)$

i) Für $k \in \mathbb{N}$ heißt

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \, d\mathbb{P}_F(x)$$

k-tes Moment von $\mathbb{P}_F$, falls das Integral wohldefiniert ist.

ii) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} \, d\mathbb{P}_F(x)$$

exponentielles Moment.

Diese Integrale sehen immer noch ziemlich abstrakt aus, wie können wir sie also explizit berechnen?

Rechenregeln für diskrete Verteilungen

Satz (Integrale für diskrete Verteilungen)

Sei $\mathbb{P}_F$ ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und F sei diskret, d. h. $F(t) = \sum_{k=1}^{N} p_k \mathbf{1}_{[a_k,\infty)}(t)$ mit $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ und $\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$. Dann gilt für $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar:

$$g \ \mathbb{P}_F\text{-integrierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{N} |g(a_k)| p_k < \infty$$

und, falls g $\mathbb{P}_F$-integrierbar ist,

$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\mathbb{P}_F = \sum_{k=1}^{N} g(a_k) p_k.$$

Beweis: Für N endlich: g stimmt fast sicher mit einer einfachen Funktion überein, dann Definition. Für N unendlich MCT.

Aufgabe 1

a) Sei auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ das W-Maß $\mathbb{P}_1 \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$ gegeben, also

$$\mathbb{P}_1 := e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k.$$

$\mathbb{P}_1$ ist also ein diskretes W-Maß mit Werten $k = 0, 1, 2, \ldots$ und zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $p_k = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$.

Berechnet das erste Moment $\int_{\mathbb{R}} x \, \mathrm{d}\mathbb{P}_1$.

b) Berechnet das exponentielle Moment $\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} \, \mathrm{d}\mathbb{P}_1$.

a) $\mathbb{P}_1 = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k$

$a_k = k \quad , k = 0, 1, 2, \ldots$

$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

wohldef. da ≥ 0

$$\int_{\mathbb{R}} x \, d\mathbb{P}_1 = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

Index-shift

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{= e^{\lambda}} = \lambda.$$

b) $x \mapsto e^{\lambda x}$ ist stetig und ≥ 0 $\Rightarrow$ Int. ist wohldef.

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} \, d\mathbb{P}_1 = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^{\lambda k} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{\lambda})^k \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{\lambda}\lambda)^k}{k!}$$

$$\overset{\text{Reihendarst. } \exp(\cdot)}{=} e^{-\lambda} e^{e^{\lambda}\lambda} = e^{\lambda(e^{\lambda}-1)}$$

Rechenregeln für absolutstetige Verteilungen

Satz (Integrale für absolutstetige Verteilungen)

Sei $\mathbb{P}_F$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und F habe die Dichte f. Dann gilt für eine Borel-messbare Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$:

$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\mathbb{P}_F \text{ ist wohldefiniert} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\,dx \text{ ist wohldefiniert}$$

und, falls die Integrale wohldefiniert sind,

$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\mathbb{P}_F = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\,dx.$$

Beweis: Trafo-Satz und Gebetsmühle!

Satz (Markov-Ungleichung für Polynome)

Sei $\mathbb{P}_F$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, sodass für eine gerade natürliche Zahl $2k$ das $2k$-te Moment existiert ist. Dann gilt, für alle $a > 0$.

$$\mathbb{P}_F([-a, a]) \geq 1 - \frac{\int_{\mathbb{R}} x^{2k} d\mathbb{P}_F(x)}{a^{2k}}.$$

Gleichbedeutend (Gegenereignis) gilt

$$\mathbb{P}_F\left([-a, a]^C\right) \leq \frac{\int_{\mathbb{R}} x^{2k} d\mathbb{P}_F(x)}{a^{2k}}.$$

Aufgabe 2

a) Sei $\mathbb{P}_2 \sim F$, wobei F die folgende Dichte f besitzt

$$f(x) := (x-1)\mathbb{1}_{[1,2)}(x) + (3-x)\mathbb{1}_{[2,3]}(x).$$

Berechnet $\int_{\mathbb{R}} x \, \mathrm{d}\mathbb{P}_2$.

b) Sei $\mathbb{P}_3 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ mit $\sigma > 0$. Zeige, dass

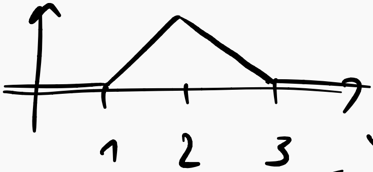
$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \mathrm{d}\mathbb{P}_3 = \sigma^2$$

gilt. *Hinweis: Partielle Integration.*

c) Sei $\sigma^2 = 0.01$. Für welche $a > 0$ gilt $\mathbb{P}_3([-a, a]) \geq 0.99$? Was fällt auf?

Hinweis: Markov-Ungleichung für $k = 1$.

a)



wohldef., denn $x \mapsto x f(x)$ ist stetig und ≥ 0

$$\int_{\mathbb{R}} x \, dP_2 = \int_{\mathbb{R}} x \left[(x-1) \mathbb{1}_{[1,2)}(x) + (3-x) \mathbb{1}_{[2,3)}(x) \right] dx$$

$$\overset{\text{lin}}{=} \int_1^2 x^2 - x \, dx + \int_2^3 3x - x^2 \, dx$$

$$\overset{\text{HdI}}{=} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 + \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_2^3$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{27}{2} - \frac{27}{3} - \frac{12}{2} + \frac{8}{3}$$

$$= -\frac{12}{3} + \frac{12}{2} = -4+6=2$$

b) $$\int_{\mathbb{R}} x^2 \, d\mathbb{P}_3(x) \underset{\substack{\text{da} \geq 0 \\ \text{f stetig}}}{\overset{\text{wohldef.}}{=}} \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \, x \left(x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right) dx$$

$$\underset{(*)}{\overset{\text{MCT}}{=}} \lim_{n\to\infty} \left(\overbrace{\left[x(-\sigma^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right]_{-n}^{n}}^{\to 0,\ n\to\infty} + \int_{-n}^{n} \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \, dx \right)$$

$= \sigma^2$.

Zu $(*)$: $f_n := f \cdot \mathbb{1}_{[-n,n]}$ erfüllt

- $f_n \to f$ fast sicher
- f_n, f messbar
- $0 \le f_1 \le \ldots \le f_n \le \ldots f$

D.h. VSS an MCT sind erfüllt.

c) Markov für $k=1$:

$$P_3([-a,a]) \ge 1 - \frac{\int x^2 \, dP_3(x)}{a^2}$$

$$= 1 - \frac{\sigma^2}{a^2} \overset{\sigma^2 = 0.01}{=} 1 - \frac{0.01}{a^2} \overset{!}{\ge} 0.99$$

$$\iff a^2 - 0.01 \ge 0.99 a^2 \iff 0.01 a^2 \ge 0.01$$

$$\iff a \ge 1$$

$\sigma^2 = 0.01$, d.h. $\sigma = 0.1$

$$P_3([-3\sigma, 3\sigma]) = P_3([-0.3, 0.3]) \ge 0.997$$